

Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie

Autor: Dirichlet, Peter

Verlag: Vieweg

Ort: Braunschweig

Jahr: 1871

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN30976923X

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X>

LOG Id: LOG_0018

LOG Titel: §. 12. Beweis des Satzes, dass ist, wenn m und m' relative Primzahlen zu einander sind

LOG Typ: chapter

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Sind $a, b \dots k, l$ die sämtlichen von einander verschiedenen in m aufgehenden Primzahlen, so ist

$$\varphi(m) = m \left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{b}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{k}\right) \left(1 - \frac{1}{l}\right)$$

die Anzahl aller derjenigen der Zahlen

$$1, 2 \dots m,$$

welche relative Primzahlen gegen die letzte m sind.

Denn damit irgend eine Zahl relative Primzahl gegen m sei, ist erforderlich und hinreichend, dass sie durch keine der in m aufgehenden absoluten Primzahlen theilbar sei.

Wir können dem gefundenen Ausdruck eine andere Form geben, indem wir m als Product von Primzahl-Potenzen darstellen; da $a, b, c \dots$ die sämtlichen von einander verschiedenen in m aufgehenden Primzahlen sind, so hat m die Form

$$m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots,$$

und es wird

$$\varphi(m) = (a - 1) a^{\alpha-1} \cdot (b - 1) b^{\beta-1} \cdot (c - 1) c^{\gamma-1} \dots$$

Um unsern Satz an einem Beispiel zu prüfen, wählen wir $m = 60$; die sämtlichen Zahlen, welche nicht grösser als 60 und relative Primzahlen gegen 60 sind, bilden die Reihe

$$1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59,$$

und ihre Anzahl ist $= 16$; in der That finden wir nach der obigen Formel, da 2, 3, 5 sämtliche in 60 aufgehende Primzahlen sind,

$$\varphi(60) = 60 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = 16.$$

§. 12.

Aus der gefundenen Form der Function $\varphi(m)$ geht auch noch folgender Satz hervor: Sind m und m' zwei relative Primzahlen, so ist

$$\varphi(mm') = \varphi(m) \varphi(m').$$

Denn sind $a, b, c \dots$ sämtliche in m , und $a', b', c' \dots$ sämtliche in m' aufgehende Primzahlen, so stimmt, da m und m' relative Primzahlen sind, keine Primzahl der einen Reihe mit einer der andern überein, d. h. alle Primzahlen

$$a, b, c \dots a', b', c' \dots$$