Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie
Autor: Dirichlet, Peter
Verlag: Vieweg
Ort: Braunschweig
Jahr: 1871
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN30976923X
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X

LOG Id: LOG_0018
LOG Titel: §. 12. Beweis des Satzes, dass .... ist, wenn m und m' relative Primzahlen zu einander sind
LOG Typ: chapter

Sind $a, b \ldots k, l$ die sämmtlichen von einander verschiedenen in m aufgehenden Primzahlen, so ist

$$\varphi(m) = m\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{1}{l}\right)$$

die Anzahl aller derjenigen der Zahlen

$$1, 2 \ldots m,$$

welche relative Primzahlen gegen die letzte m sind.

Denn damit irgend eine Zahl relative Primzahl gegen m sei, ist erforderlich und hinreichend, dass sie durch keine der in m aufgehenden absoluten Primzahlen theilbar sei.

Wir können dem gefundenen Ausdruck eine andere Form geben, indem wir m als Product von Primzahl-Potenzen darstellen; da $a, b, c \ldots$ die sämmtlichen von einander verschiedenen in m aufgehenden Primzahlen sind, so hat m die Form

$$m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots,$$

und es wird

$$\varphi(m) = (a-1)\, a^{\alpha-1} \,.\, (b-1)\, b^{\beta-1} \,.\, (c-1)\, c^{\gamma-1} \ldots$$

Um unsern Satz an einem Beispiel zu prüfen, wählen wir $m = 60$; die sämmtlichen Zahlen, welche nicht grösser als 60 und relative Primzahlen gegen 60 sind, bilden die Reihe

$$1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59,$$

und ihre Anzahl ist $= 16$; in der That finden wir nach der obigen Formel, da 2, 3, 5 sämmtliche in 60 aufgehende Primzahlen sind,

$$\varphi(60) = 60 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = 16.$$

§. 12.

Aus der gefundenen Form der Function $\varphi(m)$ geht auch noch folgender Satz hervor: *Sind m und m' zwei relative Primzahlen, so ist*

$$\varphi(mm') = \varphi(m)\, \varphi(m').$$

Denn sind $a, b, c \ldots$ sämmtliche in m, und $a', b', c' \ldots$ sämmtliche in m' aufgehende Primzahlen, so stimmt, da m und m' relative Primzahlen sind, keine Primzahl der einen Reihe mit einer der andern überein, d. h. alle Primzahlen

$$a, b, c \ldots a', b', c' \ldots$$