## Werk

**Titel:** Vorlesungen über Zahlentheorie
**Autor:** Dirichlet, Peter
**Verlag:** Vieweg
**Ort:** Braunschweig
**Jahr:** 1871
**Kollektion:** Mathematica
**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
**Werk Id:** PPN30976923X
**PURL:** http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X
**OPAC:** http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X

**LOG Id:** LOG_0019
**LOG Titel:** §, 13.   Beweis des Satzes: .... , wo sich das Summenenzeichen auf alle Divisoren n der Zahl m bezieht
**LOG Typ:** chapter

sind von einander verschieden. Sie gehen ferner sämmtlich in dem Product $mm'$ auf, und umgekehrt muss jede in $mm'$ aufgehende Primzahl, da sie in einem der beiden Factoren $m$, $m'$ aufgehen muss, mit einer dieser Primzahlen übereinstimmen. Also sind dies die sämmtlichen von einander verschiedenen in $mm'$ aufgehenden Primzahlen; hieraus folgt

$$\varphi(mm') = mm' \begin{Bmatrix} \left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots \\ \left(1-\frac{1}{a'}\right)\left(1-\frac{1}{b'}\right)\left(1-\frac{1}{c'}\right)\cdots \end{Bmatrix}$$

Da nun andererseits

$$\varphi(m) = m\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots$$

und

$$\varphi(m') = m'\left(1-\frac{1}{a'}\right)\left(1-\frac{1}{b'}\right)\left(1-\frac{1}{c'}\right)\cdots$$

ist, so ergiebt sich durch den unmittelbaren Anblick die Richtigkeit des zu beweisenden Satzes.

So ist z. B.

$$\varphi(60) = \varphi(4\,.\,15) = \varphi(4)\,\varphi(15) = 2\,.\,8 = 16.$$

Uebrigens leuchtet ein, dass der soeben bewiesene Satz ohne Weiteres auf ein Product aus beliebig vielen Zahlen $m, m', m'' \ldots$ ausgedehnt werden kann, welche sämmtlich unter einander relative Primzahlen sind; denn es ist z. B.

$$\varphi(mm'm'') = \varphi(m)\,\varphi(m'm'') = \varphi(m)\,\varphi(m')\,\varphi(m'')$$

und ähnlich für eine grössere Anzahl von Factoren.

## §. 13.

Die Aufgabe, den Werth der Function $\varphi(m)$ zu bestimmen, ist eigentlich nur ein specieller Fall von der folgenden:

*Wenn $\delta$ irgend ein Divisor der Zahl $m = n\delta$ ist, so soll die Anzahl derjenigen der Zahlen*

$$1, 2, 3 \ldots m$$

*bestimmt werden, welche mit $m$ den grössten gemeinschaftlichen Divisor $\delta$ haben.*

Wir können dieselbe sogleich auf den frühern speciellen Fall zurückführen. Zunächst leuchtet nämlich ein, dass die Zahlen, um welche es sich handelt, unter den Vielfachen von $\delta$, also unter den Zahlen

$$\delta,\ 2\delta,\ 3\delta, \ldots n\delta$$

zu suchen sind. Damit nun $\delta$ der grösste gemeinschaftliche Divisor von $m = n\delta$ und einer Zahl von der Form $r\delta$ sei, ist erforderlich und hinreichend, dass der Coefficient $r$ relative Primzahl gegen $n$ sei; die gesuchte Anzahl ist daher zugleich die Anzahl derjenigen der Zahlen

$$1, 2, 3 \ldots n,$$

welche relative Primzahlen gegen die letzte $n$ derselben sind; diese Anzahl ist folglich $= \varphi(n)$. Offenbar geht diese allgemeinere Aufgabe wieder in die frühere über, wenn der Divisor $\delta = 1$ ist.

Aus der Lösung dieser Aufgabe lässt sich nun ein schöner Satz über die Function $\varphi(m)$ ableiten, der in späteren Untersuchungen eine grosse Rolle spielt. Schreiben wir einmal alle Divisoren

$$\delta',\ \delta'',\ \delta''' \ldots$$

der Zahl

$$m = n'\delta' = n''\delta'' = n'''\delta''' = \ldots$$

auf, und theilen wir alle $m$ Zahlen

$$1, 2, 3 \ldots m$$

in ebenso viele Gruppen ein, als es Divisoren $\delta$ von $m$ giebt, indem wir alle die Zahlen, welche mit $m$ den grössten gemeinschaftlichen Divisor $\delta'$ haben, und deren Anzahl nach dem Vorhergehenden $= \varphi(n')$ ist, in die erste Gruppe, ebenso alle die $\varphi(n'')$ Zahlen, welche mit $m$ den grössten gemeinschaftlichen Divisor $\delta''$ haben, in die zweite Gruppe aufnehmen u. s. f. So leuchtet ein, dass jede der $m$ Zahlen in eine, aber auch nur in eine solche Gruppe aufgenommen wird, und es muss daher das Aggregat der Zahlen

$$\varphi(n'),\ \varphi(n''),\ \varphi(n''') \ldots$$

welche angeben, wie viele Zahlen der ersten, zweiten, dritten u. s. w. Gruppe angehören, mit der Anzahl $m$ der sämmtlichen in diese Gruppen vertheilten Zahlen übereinstimmen. Da nun die Zahlen $n', n'', n''' \ldots$ die sämmtlichen Divisoren der Zahl $m$ bilden, so erhalten wir folgenden Satz*):

---

*) *Gauss: D. A.* art. 39.