

## Werk

**Titel:** Vorlesungen über Zahlentheorie

**Autor:** Dirichlet, Peter

**Verlag:** Vieweg

**Ort:** Braunschweig

**Jahr:** 1871

**Kollektion:** Mathematica

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN30976923X

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X>

**LOG Id:** LOG\_0019

**LOG Titel:** §, 13. Beweis des Satzes: .... , wo sich das Summenzeichen auf alle Divisoren  $n$  der Zahl  $m$  bezieht

**LOG Typ:** chapter

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

sind von einander verschieden. Sie gehen ferner sämmtlich in dem Product  $mm'$  auf, und umgekehrt muss jede in  $mm'$  aufgehende Primzahl, da sie in einem der beiden Factoren  $m, m'$  aufgehen muss, mit einer dieser Primzahlen übereinstimmen. Also sind dies die sämmtlichen von einander verschiedenen in  $mm'$  aufgehenden Primzahlen; hieraus folgt

$$\varphi(mm') = mm' \left\{ \begin{array}{l} \left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{b}\right) \left(1 - \frac{1}{c}\right) \dots \\ \left(1 - \frac{1}{a'}\right) \left(1 - \frac{1}{b'}\right) \left(1 - \frac{1}{c'}\right) \dots \end{array} \right\}$$

Da nun andererseits

$$\varphi(m) = m \left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{b}\right) \left(1 - \frac{1}{c}\right) \dots$$

und

$$\varphi(m') = m' \left(1 - \frac{1}{a'}\right) \left(1 - \frac{1}{b'}\right) \left(1 - \frac{1}{c'}\right) \dots$$

ist, so ergibt sich durch den unmittelbaren Anblick die Richtigkeit des zu beweisenden Satzes.

So ist z. B.

$$\varphi(60) = \varphi(4 \cdot 15) = \varphi(4) \varphi(15) = 2 \cdot 8 = 16.$$

Uebrigens leuchtet ein, dass der soeben bewiesene Satz ohne Weiteres auf ein Product aus beliebig vielen Zahlen  $m, m', m'' \dots$  ausgedehnt werden kann, welche sämmtlich unter einander relative Primzahlen sind; denn es ist z. B.

$$\varphi(mm'm'') = \varphi(m) \varphi(m'm'') = \varphi(m) \varphi(m') \varphi(m'')$$

und ähnlich für eine grössere Anzahl von Factoren.

### §. 13.

Die Aufgabe, den Werth der Function  $\varphi(m)$  zu bestimmen, ist eigentlich nur ein specieller Fall von der folgenden:

Wenn  $\delta$  irgend ein Divisor der Zahl  $m = n\delta$  ist, so soll die Anzahl derjenigen der Zahlen

$$1, 2, 3 \dots m$$

bestimmt werden, welche mit  $m$  den grössten gemeinschaftlichen Divisor  $\delta$  haben.

Wir können dieselbe sogleich auf den frühern speciellen Fall

zurückführen. Zunächst leuchtet nämlich ein, dass die Zahlen, um welche es sich handelt, unter den Vielfachen von  $\delta$ , also unter den Zahlen

$$\delta, 2\delta, 3\delta, \dots n\delta$$

zu suchen sind. Damit nun  $\delta$  der grösste gemeinschaftliche Divisor von  $m = n\delta$  und einer Zahl von der Form  $r\delta$  sei, ist erforderlich und hinreichend, dass der Coefficient  $r$  relative Primzahl gegen  $n$  sei; die gesuchte Anzahl ist daher zugleich die Anzahl derjenigen der Zahlen

$$1, 2, 3 \dots n,$$

welche relative Primzahlen gegen die letzte  $n$  derselben sind; diese Anzahl ist folglich  $= \varphi(n)$ . Offenbar geht diese allgemeinere Aufgabe wieder in die frühere über, wenn der Divisor  $\delta = 1$  ist.

Aus der Lösung dieser Aufgabe lässt sich nun ein schöner Satz über die Function  $\varphi(m)$  ableiten, der in späteren Untersuchungen eine grosse Rolle spielt. Schreiben wir einmal alle Divisoren

$$\delta', \delta'', \delta''' \dots$$

der Zahl

$$m = n'\delta' = n''\delta'' = n'''\delta''' = \dots$$

auf, und theilen wir alle  $m$  Zahlen

$$1, 2, 3 \dots m$$

in ebenso viele Gruppen ein, als es Divisoren  $\delta$  von  $m$  giebt, indem wir alle die Zahlen, welche mit  $m$  den grössten gemeinschaftlichen Divisor  $\delta'$  haben, und deren Anzahl nach dem Vorhergehenden  $= \varphi(n')$  ist, in die erste Gruppe, ebenso alle die  $\varphi(n'')$  Zahlen, welche mit  $m$  den grössten gemeinschaftlichen Divisor  $\delta''$  haben, in die zweite Gruppe aufnehmen u. s. f. So leuchtet ein, dass jede der  $m$  Zahlen in eine, aber auch nur in eine solche Gruppe aufgenommen wird, und es muss daher das Aggregat der Zahlen

$$\varphi(n'), \varphi(n''), \varphi(n''') \dots$$

welche angeben, wie viele Zahlen der ersten, zweiten, dritten u. s. w. Gruppe angehören, mit der Anzahl  $m$  der sämmtlichen in diese Gruppen vertheilten Zahlen übereinstimmen. Da nun die Zahlen  $n', n'', n''' \dots$  die sämmtlichen Divisoren der Zahl  $m$  bilden, so erhalten wir folgenden Satz\*):

\*) Gauss: D. A. art. 39.