

Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie

Autor: Dirichlet, Peter

Verlag: Vieweg

Ort: Braunschweig

Jahr: 1871

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN30976923X

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X>

LOG Id: LOG_0020

LOG Titel: S. 14. Anderer Beweis desselben Satzes

LOG Typ: chapter

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Durchläuft n alle Divisoren einer Zahl m , so ist die entsprechende Summe

$$\Sigma \varphi(n) = m.$$

Es wird gut sein, diesen Satz wieder an einem Beispiel zu prüfen. Nehmen wir $m = 60$, so sind die Zahlen

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60$$

die sämtlichen Divisoren n von 60. Nun ist

$$\begin{aligned} \varphi(1) &= 1, & \varphi(2) &= 1, & \varphi(3) &= 2, & \varphi(4) &= 2, \\ \varphi(5) &= 4, & \varphi(6) &= 2, & \varphi(10) &= 4, & \varphi(12) &= 4, \\ \varphi(15) &= 8, & \varphi(20) &= 8, & \varphi(30) &= 8, & \varphi(60) &= 16; \end{aligned}$$

und die Summe aller dieser Zahlen ist in der That = 60.

§. 14.

Der soeben gegebene Beweis dieses wichtigen Satzes über die Function $\varphi(m)$ ergab sich unmittelbar aus dem Begriff dieser Function ohne Hülfe der vorher für dieselbe gefundenen Form und ohne alle Rechnung*); es wird aber gut sein, noch einen zweiten Beweis hinzuzufügen, welcher mehr rechnend zu Werke geht und die früher abgeleitete Form der Function und die daraus gezogenen Folgerungen voraussetzt.

Jeder Divisor n der Zahl

$$m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots$$

hat die Form

$$n = a^{\alpha'} b^{\beta'} c^{\gamma'} \dots$$

wo wie früher $a, b, c \dots$ von einander verschiedene Primzahlen bedeuten. Da also $a^{\alpha'}, b^{\beta'}, c^{\gamma'} \dots$ unter einander relative Primzahlen sind, so ist

$$\varphi(n) = \varphi(a^{\alpha'}) \cdot \varphi(b^{\beta'}) \cdot \varphi(c^{\gamma'}) \dots$$

Um nun alle Divisoren n der Zahl m zu erhalten, muss man

*) Dieser Satz charakterisirt umgekehrt die Function $\varphi(m)$ vollständig, so dass aus ihm auch die (in §. 11 gefundene) Form derselben abgeleitet werden kann; siehe die Supplemente VII, §. 188.