Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie
Autor: Dirichlet, Peter
Verlag: Vieweg
Ort: Braunschweig
Jahr: 1871
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN30976923X
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X

LOG Id: LOG_0020
LOG Titel: §. 14. Anderer Beweis desselben Satzes
LOG Typ: chapter

Durchläuft n alle Divisoren einer Zahl m, so ist die entsprechende Summe

$$\Sigma\,\varphi(n) = m.$$

Es wird gut sein, diesen Satz wieder an einem Beispiel zu prüfen. Nehmen wir $m = 60$, so sind die Zahlen

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60$$

die sämmtlichen Divisoren n von 60. Nun ist

$$\begin{array}{llll}
\varphi(1) = 1, & \varphi(2) = 1, & \varphi(3) = 2, & \varphi(4) = 2, \\
\varphi(5) = 4, & \varphi(6) = 2, & \varphi(10) = 4, & \varphi(12) = 4, \\
\varphi(15) = 8, & \varphi(20) = 8, & \varphi(30) = 8, & \varphi(60) = 16;
\end{array}$$

uud die Summe aller dieser Zahlen ist in der That $= 60$.

§. 14.

Der soeben gegebene Beweis dieses wichtigen Satzes über die Function $\varphi(m)$ ergab sich unmittelbar aus dem Begriff dieser Function ohne Hülfe der vorher für dieselbe gefundenen Form und ohne alle Rechnung*); es wird aber gut sein, noch einen zweiten Beweis hinzuzufügen, welcher mehr rechnend zu Werke geht und die früher abgeleitete Form der Function und die daraus gezogenen Folgerungen voraussetzt.

Jeder Divisor n der Zahl

$$m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$$

hat die Form

$$n = a^{\alpha'} b^{\beta'} c^{\gamma'} \ldots$$

wo wie früher $a, b, c \ldots$ von einander verschiedene Primzahlen bedeuten. Da also $a^{\alpha'}, b^{\beta'}, c^{\gamma'} \ldots$ unter einander relative Primzahlen sind, so ist

$$\varphi(n) = \varphi(a^{\alpha'}) \cdot \varphi(b^{\beta'})\, \varphi(c^{\gamma'}) \ldots$$

Um nun alle Divisoren n der Zahl m zu erhalten, muss man

*) Dieser Satz charakterisirt umgekehrt die Function $\varphi(m)$ vollständig, so dass aus ihm auch die (in §. 11 gefundene) Form derselben abgeleitet werden kann; siehe die Supplemente VII, §. 188.