Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie
Autor: Dirichlet, Peter
Verlag: Vieweg
Ort: Braunschweig
Jahr: 1871
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN30976923X
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X

LOG Id: LOG_0022
LOG Titel: §. 16. Rückblick
LOG Typ: chapter

§. 16.

Hiermit beschliessen wir die Reihe der Sätze über die Theilbarkeit der Zahlen; aber es ist wohl der Mühe werth, an dieser Stelle noch einen Rückblick auf den Entwicklungsgang dieser unserer bisherigen Untersuchungen zu werfen. Da beobachten wir nun vor allen Dingen, dass das ganze Gebäude auf *einem* Fundament ruht, nämlich auf dem Algorithmus, welcher dazu dient, den grössten gemeinschaftlichen Theiler zweier Zahlen aufzufinden. Dass alle nachfolgenden Sätze, wenn sie sich auch zum Theil auf erst später eingeführte Begriffe, wie die der relativen und absoluten Primzahlen, beziehen, doch nur einfache Consequenzen aus dem Resultat jener ersten Untersuchung sind, ist so evident, dass man unmittelbar zu der Behauptung berechtigt wird: in jeder analogen Theorie, in welcher ein dem Algorithmus des grössten gemeinschaftlichen Divisors ähnlicher Algorithmus existirt, muss auch ein System von Folgerungen Statt finden, welches dem in unserer Theorie entwickelten ganz analog ist. In der That giebt es solche Theorieen; betrachtet man z. B. alle in der Form

$$t + u\sqrt{-a}$$

enthaltenen Zahlen, in welcher a eine bestimmte positive, t und u dagegen unbestimmte reelle ganze Zahlen bedeuten, und nennt dieselben ganze complexe Zahlen oder kurz ganze Zahlen, so kann man den Begriff des Vielfachen so fassen, dass eine solche Zahl ein Vielfaches von einer zweiten heisst, wenn die erste ein Product aus der zweiten und irgend einer dritten solchen Zahl ist. Aber nur für gewisse besondere Werthe von a, z. B. für $a = 1$, lässt sich die Frage nach den gemeinschaftlichen Divisoren zweier Zahlen durch einen endlich abschliessenden Algorithmus beantworten, der dem in unserer reellen Theorie ganz ähnlich ist; es findet daher in der Theorie der Zahlen von der Form $t + u\sqrt{-1}$ auch durchgängige Analogie mit unserer Theorie der reellen Zahlen Statt. Ganz anders verhält es sich, wenn z. B. $a = 11$ ist; in der Theorie der Zahlen von der Form $t + u\sqrt{-11}$ findet unter andern der Satz nicht mehr Statt, dass eine Zahl nur auf eine einzige Weise als Product von nicht weiter zerlegbaren Zahlen dargestellt werden kann; so z. B. lässt sich die Zahl 15 einmal als $3 \,.\, 5$, ein anderes Mal als $(2+\sqrt{-11})\,(2-\sqrt{-11})$ darstellen, obgleich jede der vier Zahlen

$$3,\quad 5,\quad 2+\sqrt{-11},\quad 2-\sqrt{-11}$$

nicht weiter in Factoren von der Form $t+u\sqrt{-11}$ zerlegbar ist. Der Grund dieser interessanten Erscheinung liegt allein darin, dass es bei den Zahlen dieser Form nicht mehr gelingt, einen nach einer endlichen Anzahl von Operationen abschliessenden Algorithmus zur Auffindung der gemeinschaftlichen Divisoren zweier Zahlen zu bilden*).

*) Die Einführung der ganzen complexen Zahlen von der Form $t+u\sqrt{-1}$ rührt von *Gauss* her; eine kurze Darstellung der Elemente dieser neuen Zahlentheorie findet man in seiner Abhandlung *Theoria residuorum biquadraticorum* II, oder in einer Abhandlung von *Dirichlet: Recherches sur les formes quadratiques à coëfficients et à indéterminées complexes* (Crelle's Journal XXIV). Das oben erwähnte abweichende Verhalten anderer Zahlformen hat *Kummer* zur Einführung der *idealen* Zahlen veranlasst (Crelle's Journal XXXV).