

## Werk

**Titel:** Vorlesungen über Zahlentheorie

**Autor:** Dirichlet, Peter

**Verlag:** Vieweg

**Ort:** Braunschweig

**Jahr:** 1871

**Kollektion:** Mathematica

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN30976923X

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X>

**LOG Id:** LOG\_0026

**LOG Titel:** S. 19. Beweis des verallgemeinerten Fermat'schen Satzes

**LOG Typ:** chapter

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

## §. 19.

Betrachten wir jetzt den Ausdruck  $ax$ , in welchem  $a$  wieder relative Primzahl gegen den Modul  $k$  ist, und setzen wir wieder für  $x$  der Reihe nach die Glieder eines vollständigen Systems incongruenter Zahlen ein, aber nicht alle, sondern nur diejenigen

$$a_1, a_2, a_3 \dots,$$

welche relative Primzahlen gegen den Modul  $k$  sind, und deren Anzahl nach dem vorigen Paragraphen gleich  $\varphi(k)$  ist, so leuchtet erstens ein, dass die Werthe des Ausdrucks  $ax$ , d. h. die Producte

$$aa_1, aa_2, aa_3 \dots$$

sämmtlich incongruent sind, ferner, dass dieselben sämmtlich wieder relative Primzahlen gegen  $k$  sind; es wird daher jedes dieser Producte einem und nur einem Gliede der Reihe

$$a_1, a_2, a_3 \dots$$

congruent sein. Wir können daher setzen

$$\left. \begin{aligned} aa_1 &\equiv b_1 \\ aa_2 &\equiv b_2 \\ aa_3 &\equiv b_3 \end{aligned} \right\} \pmod{k},$$

u. s. w.

wo nun die Zahlen

$$b_1, b_2, b_3 \dots$$

vollständig, wenn auch in anderer Ordnung, mit den Zahlen

$$a_1, a_2, a_3 \dots$$

übereinstimmen, so dass namentlich

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_{\varphi(k)} \equiv b_1 b_2 b_3 \dots b_{\varphi(k)}$$

sein wird. Bezeichnen wir zur Abkürzung dieses Product mit  $P$ , und multipliciren wir die vorstehenden  $\varphi(k)$  Congruenzen mit einander, so erhalten wir daher

$$a^{\varphi(k)} \cdot P \equiv P \pmod{k}.$$

Nun ist aber  $P$  ein Product von lauter Zahlen, die relative Primzahlen gegen den Modul sind, also selbst relative Primzahl gegen den Modul  $k$ ; es ist daher nach §. 17, 6. gestattet, die vorstehende Congruenz durch den gemeinschaftlichen Factor  $P$  beider Seiten ohne Weiteres zu dividiren. Auf diese Weise erhalten wir die Congruenz

$$a^{\varphi(k)} \equiv 1 \pmod{k};$$

in Worten kann man diesen höchst wichtigen Satz folgendermaassen aussprechen:

*Ist  $a$  relative Primzahl gegen die positive Zahl  $k$ , und erhebt man  $a$  zu einer Potenz, deren Exponent  $\varphi(k)$  angiebt, wie viele der Zahlen*

$$1, 2, 3 \dots k$$

*relative Primzahlen gegen  $k$  sind, so lässt diese Potenz, durch  $k$  dividirt, stets den Rest 1.*

Nehmen wir z. B.  $k = 15$ ,  $a = 2$ , so ist  $a$  wirklich relative Primzahl gegen  $k$ ; nun ist  $\varphi(k) = \varphi(15) = \varphi(3) \varphi(5) = 8$ ; es muss daher  $2^8$ , durch 15 dividirt, den Rest 1 lassen; in der That ist

$$2^8 = 256 = 17 \cdot 15 + 1.$$

Es kann übrigens vorkommen, dass auch Potenzen von  $a$  mit niedrigerem Exponenten als  $\varphi(k)$  denselben Rest 1 geben. Dies tritt wirklich in dem eben gewählten Beispiel ein, denn es ist auch

$$2^4 = 16 = 1 \cdot 15 + 1.$$

Specialisiren wir unsern Satz für den Fall, dass  $k$  nur durch eine einzige Primzahl  $p$  theilbar, also

$$k = p^\pi, \quad \varphi(k) = (p-1)p^{\pi-1}$$

ist, so erhalten wir den Satz:

*Ist  $p$  eine Primzahl und  $a$  irgend eine durch  $p$  nicht theilbare Zahl, so ist*

$$a^{(p-1)p^{\pi-1}} \equiv 1 \pmod{p^\pi}.$$

Nehmen wir ferner hierin  $\pi = 1$ , so erhalten wir einen berühmten Satz, der zuerst von *Fermat* aufgestellt ist und daher der *Fermat'sche Satz* heisst:

*Ist  $p$  eine Primzahl und  $a$  irgend eine durch  $p$  nicht theilbare Zahl, so ist*

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Man kann diesen Satz so umformen, dass er auch für den Fall gültig bleibt, wenn  $a$  durch  $p$  theilbar ist; zu diesem Zweck braucht man nur die vorstehende Congruenz mit  $a$  zu multipliciren, wodurch sie in die folgende

$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

übergeht. Ist nämlich  $a$  theilbar durch  $p$ , so sind beide Seiten dieser Congruenz  $\equiv 0 \pmod{p}$ , also ist sie auch dann noch richtig. Umgekehrt kann man aus dieser Form des Satzes auch wieder die