Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie
Autor: Dirichlet, Peter
Verlag: Vieweg
Ort: Braunschweig
Jahr: 1871
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN30976923X
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X

LOG Id: LOG_0038
LOG Titel: §. 31. Binomische Congruenzen, deren Modulus eine Primzahl ist. Kriterium ihrer Möglichkeit; Anzahl ihrer Wurzel

LOG Typ: chapter

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

zu lösen, so wird man, indem man wieder die primitive Wurzel 2 zur Basis des Indexsystems wählt,

$$\text{Ind. } x \equiv \text{Ind. } 6 - \text{Ind. } 5 \equiv 5 - 9 \equiv 8 \pmod{12}$$

und folglich

$$x \equiv 9 \pmod{13}$$

finden.

Diese Methode, Congruenzen ersten Grades aufzulösen, scheint auf den ersten Blick nur dann anwendbar, wenn der Modul eine Primzahl ist; allein man kann leicht zeigen, dass jede beliebige Congruenz ersten Grades

$$ax \equiv b \pmod{k},$$

deren Modul eine zusammengesetzte Zahl ist, auf eine Kette von Congruenzen reducirt werden kann, deren Moduln Primzahlen sind. Wir können uns hierbei auf den Fall beschränken, in welchem a relative Primzahl gegen k ist. Man löse nun zuerst die Congruenz

$$ax \equiv b \pmod{p},$$

wo p irgend eine in $k = pk'$ aufgehende Primzahl ist, nach der neuen Methode, so erhält man ein Resultat von der Form

$$x \equiv \alpha \pmod{p} \quad \text{oder} \quad x = \alpha + px',$$

wo x' eine beliebige ganze Zahl ist; substituirt man diesen Ausdruck in die gegebene Congruenz, so nimmt sie die folgende Form an:

$$pax' \equiv (b - a\alpha) \pmod{k}.$$

Da nun $b - a\alpha$ durch p theilbar, also von der Form $b'p$ ist, so stimmen sämmtliche Wurzeln der vorstehenden Congruenz mit den sämmtlichen Wurzeln der Congruenz

$$ax' \equiv b' \pmod{k'}$$

überein. Auf dieselbe Weise kann man nun fortfahren, indem man diese Congruenz zunächst nur in Bezug auf eine in k' aufgehende Primzahl p' löst, u. s. f.; man braucht dann zuletzt nur noch von der Wurzel der letzten dieser Congruenzen durch successive Substitution zu der der ursprünglichen überzugehen.

§. 31.

Wir benutzen nun noch die Theorie der Indices, um auf sie die Theorie der *binomischen Congruenzen* für einen Primzahl-

modulus p zu stützen; nach einer frühern Bemerkung kann man einer jeden solchen binomischen Congruenz die Form

$$x^n \equiv D \pmod{p} \tag{1}$$

geben, in welcher der Coefficient der Potenz der Unbekannten $= 1$ ist; da ferner der Fall, in welchem $D \equiv 0 \pmod{p}$ und folglich auch $x \equiv 0 \pmod{p}$, ohne Interesse ist, so schliessen wir denselben aus.

Bezeichnen wir nun zur Abkürzung die Indices von D und x resp. mit γ und ξ (wenn irgend eine primitive Wurzel g von p zur Basis genommen ist), so reducirt sich die Auflösung der Congruenz (1) auf die Bestimmung aller Wurzeln ξ der Congruenz ersten Grades

$$n\xi \equiv \gamma \pmod{p-1}; \tag{2}$$

denn offenbar entspricht jeder Wurzel der einen dieser beiden Congruenzen (1) und (2) auch stets eine und nur eine Wurzel der andern.

Es sei jetzt δ der grösste gemeinschaftliche Divisor der Zahlen $p-1$ und n, so ist (§. 22) die Congruenz (2) nur dann möglich, wenn die Bedingung

$$\gamma \equiv 0 \pmod{\delta} \tag{3}$$

erfüllt ist, und dann hat sie δ nach dem Modul $p-1$ incongruente Wurzeln ξ. Wir schliessen hieraus unmittelbar den Satz:

Ist δ der grösste gemeinschaftliche Divisor des Grades n der Congruenz (1) *und der Zahl $p-1$, so ist diese Congruenz nur dann möglich, wenn die Bedingung*

$$\text{Ind. } D \equiv 0 \pmod{\delta} \tag{4}$$

erfüllt ist, und dann besitzt sie δ nach dem Modul p incongruente Wurzeln x.

Liegt z. B. die Congruenz

$$x^8 \equiv 3 \pmod{13}$$

vor, so ist $\delta = 4$; nehmen wir ferner die primitive Wurzel 2 als Basis für die Indices, so ist Ind. $3 = 4$, also ist die Bedingung (4) erfüllt, und die vorgelegte Congruenz hat 4 nach dem Modul 13 incongruente Wurzeln; um diese zu finden, bilden wir die Congruenz ersten Grades

$$8\xi \equiv 4 \pmod{12} \quad \text{oder} \quad 2\xi \equiv 1 \pmod{3},$$

und erhalten hieraus

$$\xi \equiv 2 \pmod{3}$$

oder

$$\xi \equiv 2, \text{ oder } 5, \text{ oder } 8, \text{ oder } 11 \pmod{12},$$

folglich, indem wir zu diesen Indices ξ die zugehörigen Zahlen suchen,

$$x \equiv 4, \text{ oder } 6, \text{ oder } 9, \text{ oder } 7 \pmod{13}.$$

Da die Möglichkeit der binomischen Congruenz von der Wahl der primitiven Wurzel g, auf welche sich die Indices γ und ξ beziehen, nothwendig unabhängig sein muss, so wird das Kriterium, dass der Index γ einer Zahl D durch einen Divisor δ der Zahl $p-1$ theilbar sein muss, in eine von der Theorie der Indices unabhängige Form gebracht werden können. Dies bestätigt sich auf folgende Weise. Sobald in Bezug auf irgend eine Basis g der Index γ der Zahl D durch den Divisor δ von $p-1$ theilbar, also von der Form $h\delta$ ist, so haben wir die Congruenz

$$D \equiv g^{h\delta} \pmod{p}$$

und hieraus durch Potenzirung

$$D^{\frac{p-1}{\delta}} \equiv g^{h(p-1)} \equiv 1 \pmod{p};$$

und umgekehrt, sobald die Zahl D dieser Bedingung

$$D^{\frac{p-1}{\delta}} \equiv 1 \pmod{p}$$

genügt, muss der in Bezug auf eine beliebige Basis g genommene Index γ der Zahl D durch δ theilbar sein; denn es sei

$$D \equiv g^{\gamma} \pmod{p},$$

so folgt hieraus

$$g^{\gamma \cdot \frac{p-1}{\delta}} \equiv 1 \pmod{p},$$

und da g eine primitive Wurzel, d. h. eine zum Exponenten $p-1$ gehörende Zahl ist, so muss der Exponent durch $p-1$, und folglich der Index γ durch δ theilbar sein.

Nachdem das ursprüngliche Kriterium so umgeformt ist, können wir unsern Satz in folgender Weise unabhängig von der Theorie der Indices aussprechen:

Ist δ der grösste gemeinschaftliche Divisor der Zahlen n und $p-1$, so hat die Congruenz

$$x^n \equiv D \pmod{p}, \qquad (1)$$

genau δ incongruente Wurzeln, oder gar keine, je nachdem die Zahl D der Bedingung

$$D^{\frac{p-1}{\delta}} \equiv 1 \pmod{p} \qquad (5)$$

genügt oder nicht genügt.

Den speciellen Fall, in welchem $\delta = n$ und $D = 1$ ist, haben wir schon früher (§. 27) auf anderm Wege bewiesen; es würde nicht schwer sein, aus den dort angewandten Principien auch den allgemeinen Satz abzuleiten, ohne die Theorie der Indices zu Hülfe zu rufen; doch überlassen wir der Kürze halber diese Untersuchung dem Leser.

Wir können nun auch noch die Frage aufstellen: wenn der Grad n der Congruenz (1) gegeben ist, wie viele incongruente Zahlen D existiren, für welche die Congruenz (1) möglich ist? Hierauf liefert der Satz selbst sogleich die Antwort, denn diese Zahlen D sind ja die sämmtlichen Wurzeln der binomischen Congruenz

$$x^{\frac{p-1}{\delta}} \equiv 1 \pmod{p};$$

der grösste gemeinschaftliche Divisor des Exponenten $(p-1):\delta$ und der Zahl $p-1$ ist in diesem Falle der Exponent $(p-1):\delta$ selbst, und da das Kriterium für die Möglichkeit offenbar erfüllt ist, so ist also die Anzahl aller incongruenten Zahlen D, für welche die Congruenz (1) möglich ist, genau $= (p-1):\delta$. Man nennt solche Zahlen D, welche einer $n$ten Potenz einer Zahl congruent sind, kurz $n$te Potenzreste, und wir können daher sagen:

Die Anzahl aller nten Potenzreste ist $= (p-1):\delta$, *wo* δ *den grössten gemeinschaftlichen Divisor der Zahlen* n *und* $p-1$ *bezeichnet.*

Man findet dieselben offenbar, wenn man alle incongruenten Zahlen zur $n$ten Potenz erhebt und deren Reste bildet. Wenn $n = 2, 3, 4$ ist, so nennt man diese Zahlen resp. *quadratische*, *cubische*, *biquadratische Reste.* Mit der Theorie der erstern, welche für sich allein schon eine grosse Ausdehnung besitzt, werden wir uns nun im Folgenden ausführlich beschäftigen.