Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie
Autor: Dirichlet, Peter
Verlag: Vieweg
Ort: Braunschweig
Jahr: 1871
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN30976923X
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X

LOG Id: LOG_0041
LOG Titel: §. 33. Ist der Modulus eine ungerade Primzahl p, so zerfallen die durch p nicht theilbaren Zahlen in gleich viel Reste und Nichtreste. Charakter eines Productes aus mehreren Factoren. Symbol von Legendre
LOG Typ: chapter

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Die Theorie der quadratischen Reste zerfällt nun in zwei Haupttheile; man kann nämlich einmal die Frage aufwerfen:

Wenn der Modul k gegeben ist, welches sind dann die sämmtlichen incongruenten quadratischen Reste von k? und wie viele Wurzeln hat die einer jeden dieser Zahlen entsprechende Congruenz?

Bei weitem schwieriger ist aber die Beantwortung der folgenden zweiten Hauptfrage:

Wenn die Zahl D gegeben ist, welches sind dann die Moduln k, für welche die Congruenz (1) *möglich ist, d. h. welches sind die Zahlen k, von denen die gegebene Zahl D quadratischer Rest ist?*

§. 33.

Wir beschäftigen uns zuerst mit der ersten Frage und beginnen die Untersuchung mit dem einfachsten Falle, mit dem nämlich, wo der Modul eine *ungerade Primzahl p* ist (der Fall $p = 2$ erledigt sich unmittelbar durch die Bemerkung, dass jede ungerade Zahl $\equiv 1^2$, also quadratischer Rest von 2 ist). Hier erhalten wir die vollständige Antwort sogleich durch die vorhergehende Theorie der binomischen Congruenzen (§. 31). In unserm Falle ist nämlich $n = 2$ der Grad der binomischen Congruenz, und da $p - 1$ gerade ist, so ist $\delta = 2$ der grösste gemeinschaftliche Divisor von n und $p - 1$; die Congruenz

$$x^2 \equiv D \pmod{p}$$

ist daher stets und nur dann möglich, wenn

$$D^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p},$$

und zwar hat sie jedesmal zwei incongruente Wurzeln; es giebt $\frac{1}{2}(p-1)$ quadratische Reste, und folglich, da die Anzahl aller incongruenten und durch p nicht theilbaren Zahlen gleich $p - 1$ ist, auch $\frac{1}{2}(p-1)$ Nichtreste von p. Da ferner nach dem Fermat'schen Satze

$$D^{p-1} - 1 = (D^{\frac{p-1}{2}} - 1)(D^{\frac{p-1}{2}} + 1) \equiv 0 \pmod{p}$$

ist, so folgt, dass

$$D^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$$

sein muss, so oft D ein Nichtrest von p ist. Je nachdem also

$D^{\frac{p-1}{2}} \equiv +1$ oder $\equiv -1$ ist, ist D ein Rest oder Nichtrest von p. Nennt man die Eigenschaft einer Zahl D, Rest oder Nichtrest von p zu sein, ihren *Charakter*, so ist derselbe also durch dieses Kriterium vollständig bestimmt*).

Es lässt sich indessen auch ganz elementar beweisen, dass die Anzahl sowohl der Reste als auch der Nichtreste $= \frac{1}{2}(p-1)$ ist. Quadrirt man nämlich die $\frac{1}{2}(p-1)$ Zahlen

$$1,\ 2,\ 3, \ldots \frac{p-1}{2},$$

so sind die Quadrate sämmtlich incongruent; denn sind r und s zwei verschiedene dieser Zahlen, so ist die Differenz ihrer Quadrate

$$r^2 - s^2 = (r+s)\,(r-s)$$

nicht theilbar durch p, da die Factoren $r+s$ und $r-s$ kleiner als p sind. Diese $\frac{1}{2}(p-1)$ Quadrate geben also wirklich $\frac{1}{2}(p-1)$ incongruente quadratische Reste; dagegen liefern die Quadrate der folgenden Zahlen

$$\frac{p+1}{2},\ \frac{p+3}{2} \cdots (p-1)$$

dieselben Reste wieder; denn es ist allgemein

$$(p-r)^2 = p^2 - 2rp + r^2 \equiv r^2 \pmod{p}.$$

Also ist $\frac{1}{2}(p-1)$ die Anzahl aller quadratischen Reste, und folglich auch die der quadratischen Nichtreste.

Da ein Product aus mehreren Factoren, die nicht durch p theilbar sind, dieselbe Eigenschaft hat, so kann man nach dem Charakter des Productes fragen, wenn die Charaktere der Factoren gegeben sind. Beschränken wir uns zunächst auf zwei Factoren, so sind folgende drei Fälle zu unterscheiden.

I. Das Product aus zwei Resten ist wieder ein Rest; denn sind a und a' Reste, so giebt es Zahlen x, x' von der Beschaffenheit, dass $a \equiv x^2 \pmod{p}$, $a' \equiv x'^2 \pmod{p}$; hieraus folgt aber $aa' \equiv (xx')^2 \pmod{p}$, d. h. aa' ist Rest von p.

II. Das Product aus einem Rest und einem Nichtrest ist ein Nichtrest. Denn wenn wir ein vollständiges System incongruenter

*) Dies Kriterium rührt wesentlich von *Euler* her; man vergl. z. B. die Abhandlung *Theoremata circa residua ex divisione potestatum relicta*, Nov. Comm. Petrop. VII, p. 49; aber es ist mir nicht geglückt, in seinen zahlreichen Arbeiten über diesen Gegenstand eine Stelle aufzufinden, wo dasselbe in voller Schärfe ausgesprochen wäre.

und durch p nicht theilbarer Zahlen bilden, so zerfällt dasselbe in zwei Gruppen, deren eine $\frac{1}{2}(p-1)$ Reste — wir wollen sie allgemein mit α bezeichnen — und deren zweite $\frac{1}{2}(p-1)$ Nichtreste β enthält. Multiplicirt man nun alle diese Zahlen α und β mit einem Reste a, so bilden die Producte $a\alpha$ und $a\beta$ wieder ein vollständiges System incongruenter (durch p nicht theilbarer) Zahlen, welches also wieder $\frac{1}{2}(p-1)$ Reste und $\frac{1}{2}(p-1)$ Nichtreste enthält. In der That sind nun (nach I.) die Producte $a\alpha$ sämmtlich wieder Reste; es müssen daher die anderen $\frac{1}{2}(p-1)$ Producte $a\beta$ sämmtlich Nichtreste sein; also ist das Product aus jedem Rest a und jedem Nichtrest β ein Nichtrest.

III. Das Product aus zwei Nichtresten ist ein Rest. Denn bildet man wieder das System der Reste α und Nichtreste β, und multiplicirt dieselben mit einem Nichtreste b, so sind die Producte $b\alpha$ (nach II.) sämmtlich Nichtreste; folglich müssen die übrigen $\frac{1}{2}(p-1)$ Producte $b\beta$ sämmtlich Reste sein.

Man kann diese wichtigen Sätze offenbar in den folgenden einen zusammenfassen:

Ein Product aus beliebig vielen durch die Primzahl p nicht theilbaren Zahlen ist Rest oder Nichtrest von p, je nachdem die Anzahl der Nichtreste, welche sich unter den Factoren finden, gerade oder ungerade ist.

Dieser Satz ergiebt sich auch unmittelbar aus dem oben aufgestellten Kriterium für den Charakter einer Zahl; denn da

$$(abc\ldots)^{\frac{p-1}{2}} = a^{\frac{p-1}{2}}\, b^{\frac{p-1}{2}}\, c^{\frac{p-1}{2}} \ldots$$

ist, so wird

$$(abc\ldots)^{\frac{p-1}{2}} \equiv +1 \quad \text{oder} \quad \equiv -1 \pmod{p}$$

sein, je nachdem die Anzahl der Factoren $a^{\frac{p-1}{2}}$, $b^{\frac{p-1}{2}}$, $c^{\frac{p-1}{2}}\ldots$, welche $\equiv -1$ sind, eine gerade oder ungerade ist.

Man kann diesen Satz in Form einer Gleichung ausdrücken, wenn man sich eines von *Legendre**) in die Zahlentheorie eingeführten Zeichens bedient, welches in allen folgenden Untersuchungen eine grosse Rolle spielt. *Legendre* bezeichnet nämlich durch das Symbol

$$\left(\frac{m}{p}\right)$$

*) *Théorie des Nombres*, 3me éd. Tom. I. p. 197.