

Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie

Autor: Dirichlet, Peter

Verlag: Vieweg

Ort: Braunschweig

Jahr: 1871

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN30976923X

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X>

LOG Id: LOG_0045

LOG Titel: §. 37. Fall, in welchem der Modulus eine beliebige Zahl ist

LOG Typ: chapter

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

sein. Da nun die Differenz der beiden Factoren $\frac{1}{2}(x - \alpha)$ und $\frac{1}{2}(x + \alpha)$ eine ungerade Zahl ist, so muss einer von ihnen ungerade, und der andere folglich theilbar durch $2^{\pi-2}$ sein. Dies giebt folgende Fälle:

$$x \equiv \alpha \pmod{2^{\pi-1}} \quad \text{oder} \quad x \equiv -\alpha \pmod{2^{\pi-1}}$$

und diese liefern wieder folgende vier Fälle:

$$x \equiv \alpha \pmod{2^{\pi}}; \quad x \equiv \alpha + 2^{\pi-1} \pmod{2^{\pi}};$$

$$x \equiv -\alpha \pmod{2^{\pi}}; \quad x \equiv -\alpha - 2^{\pi-1} \pmod{2^{\pi}}.$$

Und umgekehrt überzeugt man sich leicht, dass jede dieser vier in Bezug auf den Modul 2^{π} incongruenten Zahlen der Congruenz genügt.

Wir fassen die ganze Untersuchung in folgendem Satze zusammen:

Die Congruenz

$$x^2 \equiv D \pmod{2^{\pi}}$$

ist stets möglich, wenn $\pi = 1$, und hat dann eine Wurzel; sie ist, wenn $\pi = 2$, stets und nur dann möglich, wenn $D \equiv 1 \pmod{4}$ und sie hat dann zwei Wurzeln; sie ist, wenn $\pi \geq 3$, stets und nur dann möglich, wenn $D \equiv 1 \pmod{8}$ ist, und zwar hat sie dann vier Wurzeln.

§. 37.

Es ist jetzt leicht, die Möglichkeit und die Anzahl der Wurzeln der Congruenz $x^2 \equiv D$ für einen beliebigen Modulus zu beurtheilen, der relative Primzahl zu D ist. Wir führen diese Untersuchung ganz allgemein in folgender Weise.

Es seien $a, b, c \dots$ relative Primzahlen zu einander, und

$$f(x) \equiv 0 \pmod{abc\dots} \quad (1)$$

eine beliebige zur Auflösung vorgelegte Congruenz, so lässt dieselbe sich stets auf die vollständige Auflösung der Congruenzen

$$\left. \begin{aligned} f(x) &\equiv 0 \pmod{a} \\ f(x) &\equiv 0 \pmod{b} \\ f(x) &\equiv 0 \pmod{c} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

u. s. w.

zurückführen. Zunächst leuchtet ein, dass jede Wurzel x der Congruenz (1) auch allen Congruenzen (2) genügen muss; es wird daher die Congruenz (1) unmöglich sein, wenn dies mit irgend einer der Congruenzen (2) der Fall ist. Umgekehrt, ist α irgend eine Wurzel der Congruenz $f(x) \equiv 0 \pmod{a}$, ebenso β irgend eine Wurzel der Congruenz $f(x) \equiv 0 \pmod{b}$, γ eine Wurzel der Congruenz $f(x) \equiv 0 \pmod{c}$ u. s. w., so bestimme man (nach §. 25) eine Zahl x durch das System von Congruenzen

$$\left. \begin{aligned} x &\equiv \alpha \pmod{a} \\ x &\equiv \beta \pmod{b} \\ x &\equiv \gamma \pmod{c} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

u. s. w.,

so wird

$$\begin{aligned} f(x) &\equiv f(\alpha) \equiv 0 \pmod{a} \\ f(x) &\equiv f(\beta) \equiv 0 \pmod{b} \\ f(x) &\equiv f(\gamma) \equiv 0 \pmod{c} \end{aligned}$$

u. s. w.

und folglich, da $a, b, c \dots$ relative Primzahlen zu einander sind, auch

$$f(x) \equiv 0 \pmod{abc \dots},$$

d. h. jede dem System (3) genügende Zahl x ist eine Wurzel der vorgelegten Congruenz (1). Da nun (nach §. 25) dem System (3) unendlich viele Zahlen x genügen, welche aber alle nach dem Modul $abc \dots$ einander congruent sind, so liefert das System (3) eine und nur eine Wurzel x der Congruenz (1). Ist nun

$$\begin{array}{llllll} \lambda & \text{die Anzahl aller incongruenten Wurzeln } \alpha \pmod{a} \\ \mu & " & " & " & " & \beta \pmod{b} \\ \nu & " & " & " & " & \gamma \pmod{c} \end{array}$$

u. s. w.

so kann man im Ganzen $\lambda\mu\nu \dots$ verschiedene Systeme (3) bilden, welchen (nach §. 25) ebensoviele verschiedene Wurzeln x der Congruenz (1) entsprechen; und andere Wurzeln kann diese letztere nicht besitzen, weil, wie schon oben bemerkt ist, jede bestimmte Wurzel x der Congruenz (1) auch Wurzel aller Congruenzen (2) und folglich einem bestimmten $\alpha \pmod{a}$, einem bestimmten $\beta \pmod{b}$, einem bestimmten $\gamma \pmod{c}$ u. s. f. congruent sein muss. Mithin ist die Anzahl aller nach dem Modul $abc \dots$ incongruenten Wurzeln der vorgelegten Congruenz $= \lambda\mu\nu \dots$