Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie
Autor: Dirichlet, Peter
Verlag: Vieweg
Ort: Braunschweig
Jahr: 1871
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN30976923X
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X

LOG Id: LOG_0047
LOG Titel: §. 39. Reduction der Aufgabe, die Moduln zu finden, von denen eine gegebene Zahl quadratischer Rest ist.
LOG Typ: chapter

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

für jeden Modul k möglich ist; die Anzahl σ ihrer Wurzeln ist $= 1$, wenn $k = 1$ oder $k = 2$; sie ist $= 2$, wenn k eine Potenz einer ungeraden Primzahl oder das Doppelte einer solchen Potenz oder $= 4$ ist; in allen übrigen Fällen ist σ durch 4 theilbar. Schliessen wir die Fälle $k = 1$ und $k = 2$ aus, so zerfallen die σ Wurzeln in $\frac{1}{2}\sigma$ Paare von Wurzeln ϱ und $-\varrho$; denn mit ϱ ist gleichzeitig auch $-\varrho$ eine Wurzel, und da ϱ relative Primzahl zu k, und folglich 2ϱ nicht $\equiv 0 \pmod{k}$ sein kann, so sind je zwei solche Wurzeln ϱ und $-\varrho$ auch incongruent. Das Product $\varrho \times (-\varrho) = -\varrho^2$ zweier solcher Wurzeln ist $\equiv -1$, und folglich ist das Product aller σ Wurzeln $\equiv +1$ oder -1, je nachdem σ durch 4 theilbar ist oder nicht.

Unter den $\varphi(k)$ Zahlen z, welche nicht grösser als k und relative Primzahlen zu k sind, finden sich zunächst die σ Wurzeln der Congruenz (1); die übrigen $\varphi(k) - \sigma$ dieser Zahlen z (wenn noch solche vorhanden sind) lassen sich in Paare von je zwei solchen Zahlen r und s zerlegen, deren Product $rs \equiv 1$ ist; denn zu jeder Zahl r gehört (nach §. 22) eine solche Zahl s und nur eine, und ausserdem kann s nicht $\equiv r$ sein, weil sonst $r^2 \equiv 1$, und folglich r eine der σ Wurzeln der Congruenz (1) wäre. Mithin ist auch das Product aller dieser $\varphi(k) - \sigma$ Zahlen $\equiv 1$.

Multiplicirt man daher alle $\varphi(k)$ Zahlen z mit einander, so wird das Product $\equiv -1$, wenn k Potenz einer ungeraden Primzahl oder das Doppelte einer solchen Potenz oder $= 4$ ist, in allen übrigen Fällen aber $\equiv +1$. (In den beiden ausgeschlossenen Fällen $k = 1$ und $k = 2$ ist $\varphi(k) = 1$, und die einzige Zahl $z \equiv \pm 1$.) Dies ist der verallgemeinerte Wilson'sche Satz*).

§. 39.

Nachdem in den vorhergehenden Paragraphen die erste der beiden in §. 32 aufgeworfenen Fragen ihre vollständige Beantwortung gefunden hat, wenden wir uns jetzt zu der zweiten ungleich interessanteren, aber auch schwierigern Aufgabe:

Alle Moduln k zu finden, von welchen eine gegebene Zahl D quadratischer Rest ist.

*) *Gauss: D. A.* art. 78.

Bevor wir zu der Lösung derselben übergehen, wollen wir erwähnen, dass man häufig, namentlich in den älteren Schriften, eine andere Ausdrucksweise vorfindet. Die Moduln k, für welche eine Congruenz $f(x) \equiv 0 \pmod{k}$ möglich ist, nennt man auch *Divisoren der Form* $f(x)$, weil es Zahlen x giebt, für welche die *Form* $f(x)$ durch einen solchen Modul k theilbar wird; die von uns gesuchten Zahlen k sind daher die Divisoren der Form $x^2 - D$; sie stimmen vollständig überein mit den Divisoren der *Form* $t^2 - Du^2$, in welcher t, u zwei unbestimmte ganze Zahlen bedeuten, die aber immer relative Primzahlen zu einander sein müssen. Dass wirklich jeder Divisor der Form $x^2 - D$ auch ein Divisor der Form $t^2 - Du^2$ ist, leuchtet unmittelbar ein, da die letztere in die erstere übergeht, wenn man $t = x$, $u = 1$ setzt. Umgekehrt, ist k Divisor der Form $t^2 - Du^2$, so ist u jedenfalls relative Primzahl zu k (denn ginge irgend eine Primzahl gleichzeitig in k und u auf, so müsste sie auch in t^2 und folglich auch in t aufgehen, gegen die Voraussetzung, dass t, u relative Primzahlen sind), und man kann folglich eine Zahl x finden, welche der Congruenz $ux \equiv t \pmod{k}$ genügt; da nun $t^2 - Du^2 \equiv 0 \pmod{k}$, so ist auch $u^2(x^2 - D) \equiv 0 \pmod{k}$ und folglich, da u^2 relative Primzahl zu k ist, auch $x^2 - D \equiv 0 \pmod{k}$, d. h. jeder Divisor k der Form $t^2 - Du^2$, in welcher t und u relative Primzahlen zu einander sind, ist auch Divisor der Form $x^2 - D$.

Das allgemeine Problem wird daher häufig auch so ausgedrückt: es sollen alle Divisoren der Form $t^2 - Du^2$ gefunden werden, in welcher D eine gegebene, t und u dagegen zwei unbestimmte ganze Zahlen bedeuten, die relative Primzahlen zu einander sind.

Wir beschränken uns auch hier auf solche (immer mit *positivem* Vorzeichen genommene) Moduln k, die relative Primzahlen zu D sind; da ferner nach den vorhergehenden Untersuchungen die Möglichkeit der Congruenz $x^2 \equiv D \pmod{k}$ nur von der Beschaffenheit der in k aufgehenden Primzahlen abhängt und für einen Modul von der Form 2^n immer leicht beurtheilt werden kann, so kommt es nur darauf an, alle ungeraden (in D nicht aufgehenden) Primzahlen p zu finden, von welchen D quadratischer Rest ist. Bedenken wir ferner, dass (nach §. 33) der quadratische Charakter einer Zahl D in Bezug auf einen solchen Modulus p nur von den in D enthaltenen Factoren abhängt, so werden wir in letzter Instanz auf folgendes Problem geführt: