Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie
Autor: Dirichlet, Peter
Verlag: Vieweg
Ort: Braunschweig
Jahr: 1871
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN30976923X
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X

LOG Id: LOG_0055
LOG Titel: §. 47. Anwendung dieser Verallgemeinerung auf die Werthbestimmung eines Symbols
LOG Typ: chapter

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

sein soll. Dann leuchtet augenblicklich ein, dass die Sätze 1., 2., 3. und 6. ohne Beschränkung gültig bleiben; ferner, dass der Satz 5. nur dann richtig ist, wenn P positiv ist, dagegen für ein negatives P falsch wird; und endlich, dass der Satz 7. nur dann gültig bleibt, wenn mindestens eine der beiden Zahlen P und Q positiv ist, dagegen seine Gültigkeit verliert, wenn beide Zahlen P und Q negativ sind.

§. 47.

Die oben (§. 45) an einem Beispiel behandelte Aufgabe, den Werth des Legendre'schen Symbols zu bestimmen, bildet offenbar nur einen ganz speciellen Fall der allgemeinen Aufgabe, den Werth des Jacobi'schen Symbols zu bestimmen. Es zeigt sich nun, dass die damals nothwendige Zerlegung in Primzahlfactoren (abgesehen von dem Factor 2) ganz überflüssig geworden, und der anzuwendende Algorithmus demjenigen ganz ähnlich ist, durch welchen der grösste gemeinschaftliche Divisor zweier Zahlen gefunden wird. Einige Beispiele werden genügen, um diese einfachere Methode zu erläutern.

Beispiel 1: Nehmen wir das schon oben (§. 45) behandelte Beispiel, so können wir jetzt nach dem verallgemeinerten Reciprocitätssatze

$$\left(\frac{365}{1847}\right) = \left(\frac{1847}{365}\right)$$

setzen, weil 365 von der Form $4n + 1$ ist. Da ferner $1847 \equiv 22 \pmod{365}$ ist, so ist nach §. 46, 3. und 2.

$$\left(\frac{1847}{365}\right) = \left(\frac{22}{365}\right) = \left(\frac{2}{365}\right)\left(\frac{11}{365}\right);$$

da ferner $365 \equiv 5 \pmod{8}$, so ist nach §. 46, 6.

$$\left(\frac{2}{365}\right) = -1,$$

also

$$\left(\frac{365}{1847}\right) = -\left(\frac{11}{365}\right).$$

Nach dem verallgemeinerten Reciprocitätssatz ist nun wieder

$$\left(\frac{11}{365}\right) \text{[redacted]} = \left(\frac{365}{11}\right) = \left(\frac{2}{11}\right) = -1,$$

und folglich

$$\left(\frac{365}{1847}\right) = +1,$$

wie früher.

Beispiel 2: Nach dem verallgemeinerten Reciprocitätssatze ist

$$\left(\frac{195}{1901}\right) = \left(\frac{1901}{195}\right);$$

weil $1901 \equiv -49 \pmod{195}$, so ist

$$\left(\frac{1901}{195}\right) = \left(\frac{-49}{195}\right);$$

da ferner die Zahlen -49 und 195 nicht beide negativ sind, so gilt für sie der verallgemeinerte Reciprocitätssatz, und, weil beide von der Form $4n+3$ sind, so ist

$$\left(\frac{-49}{195}\right) = -\left(\frac{195}{-49}\right) = -\left(\frac{195}{49}\right);$$

weil endlich $195 \equiv -1 \pmod{49}$, und 49 von der Form $4n+1$ ist, so ist

$$\left(\frac{195}{49}\right) = \left(\frac{-1}{49}\right) = +1,$$

also

$$\left(\frac{195}{1901}\right) = -1$$

d. h. 195 ist quadratischer Nichtrest der Primzahl 1901. Natürlich hätte sich die Auflösung abkürzen lassen durch Zerlegung in Factoren, nämlich durch die Bemerkung, dass $49 = 7 \,.\, 7$ und folglich

$$\left(\frac{-49}{195}\right) = \left(\frac{-1}{195}\right) = -1$$

ist; überhaupt wird die Operation immer bedeutend abgekürzt, wenn man im Zähler oder Nenner des Symbols quadratische Factoren bemerkt, da diese sogleich fortgelassen werden können.

Beispiel 3: Da $74 = 2 \,.\, 37$, und $101 \equiv 5 \pmod{8}$ ist, so ist

$$\left(\frac{74}{101}\right) = \left(\frac{2}{101}\right)\left(\frac{37}{101}\right) = -\left(\frac{37}{101}\right);$$

dann ist ferner nach dem Reciprocitätssatze