

Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie

Autor: Dirichlet, Peter

Verlag: Vieweg

Ort: Braunschweig

Jahr: 1871

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN30976923X

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X>

LOG Id: LOG_0055

LOG Titel: S. 47. Anwendung dieser Verallgemeinerung auf die Werthbestimmung eines Symbols

LOG Typ: chapter

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

sein soll. Dann leuchtet augenblicklich ein, dass die Sätze 1., 2., 3. und 6. ohne Beschränkung gültig bleiben; ferner, dass der Satz 5. nur dann richtig ist, wenn P positiv ist, dagegen für ein negatives P falsch wird; und endlich, dass der Satz 7. nur dann gültig bleibt, wenn mindestens eine der beiden Zahlen P und Q positiv ist, dagegen seine Gültigkeit verliert, wenn beide Zahlen P und Q negativ sind.

§. 47.

Die oben (§. 45) an einem Beispiel behandelte Aufgabe, den Werth des Legendre'schen Symbols zu bestimmen, bildet offenbar nur einen ganz speciellen Fall der allgemeinen Aufgabe, den Werth des Jacobi'schen Symbols zu bestimmen. Es zeigt sich nun, dass die damals nothwendige Zerlegung in Primzahlfactoren (abgesehen von dem Factor 2) ganz überflüssig geworden, und der anzuwendende Algorithmus demjenigen ganz ähnlich ist, durch welchen der grösste gemeinschaftliche Divisor zweier Zahlen gefunden wird. Einige Beispiele werden genügen, um diese einfachere Methode zu erläutern.

Beispiel 1: Nehmen wir das schon oben (§. 45) behandelte Beispiel, so können wir jetzt nach dem verallgemeinerten Reciprocitätssatze

$$\left(\frac{365}{1847}\right) = \left(\frac{1847}{365}\right)$$

setzen, weil 365 von der Form $4n + 1$ ist. Da ferner $1847 \equiv 22 \pmod{365}$ ist, so ist nach §. 46, 3. und 2.

$$\left(\frac{1847}{365}\right) = \left(\frac{22}{365}\right) = \left(\frac{2}{365}\right) \left(\frac{11}{365}\right);$$

da ferner $365 \equiv 5 \pmod{8}$, so ist nach §. 46, 6.

$$\left(\frac{2}{365}\right) = -1;$$

also

$$\left(\frac{365}{1847}\right) = - \left(\frac{11}{365}\right).$$

Nach dem verallgemeinerten Reciprocitätssatz ist nun wieder

$$\left(\frac{11}{365}\right) \cancel{\phantom{\left(\frac{11}{365}\right)}} = \left(\frac{365}{11}\right) = \left(\frac{2}{11}\right) = -1,$$

und folglich

$$\left(\frac{365}{1847}\right) = +1,$$

wie früher.

Beispiel 2: Nach dem verallgemeinerten Reciprocitätssatze ist

$$\left(\frac{195}{1901}\right) = \left(\frac{1901}{195}\right);$$

weil $1901 \equiv -49 \pmod{195}$, so ist

$$\left(\frac{1901}{195}\right) = \left(\frac{-49}{195}\right);$$

da ferner die Zahlen -49 und 195 nicht beide negativ sind, so gilt für sie der verallgemeinerte Reciprocitätssatz, und, weil beide von der Form $4n + 3$ sind, so ist

$$\left(\frac{-49}{195}\right) = - \left(\frac{195}{-49}\right) = - \left(\frac{195}{49}\right);$$

weil endlich $195 \equiv -1 \pmod{49}$, und 49 von der Form $4n + 1$ ist, so ist

$$\left(\frac{195}{49}\right) = \left(\frac{-1}{49}\right) = +1,$$

also

$$\left(\frac{195}{1901}\right) = -1$$

d. h. 195 ist quadratischer Nichtrest der Primzahl 1901 . Natürlich hätte sich die Auflösung abkürzen lassen durch Zerlegung in Factoren, nämlich durch die Bemerkung, dass $49 = 7 \cdot 7$ und folglich

$$\left(\frac{-49}{195}\right) = \left(\frac{-1}{195}\right) = -1$$

ist; überhaupt wird die Operation immer bedeutend abgekürzt, wenn man im Zähler oder Nenner des Symbols quadratische Factoren bemerkt, da diese sogleich fortgelassen werden können.

Beispiel 3: Da $74 = 2 \cdot 37$, und $101 \equiv 5 \pmod{8}$ ist, so ist

$$\left(\frac{74}{101}\right) = \left(\frac{2}{101}\right) \left(\frac{37}{101}\right) = - \left(\frac{37}{101}\right);$$

dann ist ferner nach dem Reciprocitätssatze