

Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie

Autor: Dirichlet, Peter

Verlag: Vieweg

Ort: Braunschweig

Jahr: 1871

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN30976923X

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X>

LOG Id: LOG_0062

LOG Titel: S. 54. Transformation der Formen. Eigentliche und uneigentliche Substitutionen

LOG Typ: chapter

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Lösung desselben die Theorie der *Transformation* erforderlich, mit welcher wir uns zunächst beschäftigen wollen.

§. 54.

Ebenso wie die Gleichungen der Curven in der analytischen Geometrie ihre Gestalt ändern, wenn ein anderes Coordinatensystem gewählt wird, so geht eine quadratische Form (a, b, c) durch Einführung zweier neuen Variablen in eine neue quadratische Form (a', b', c') über. Sind nämlich x, y die Variablen der Form (a, b, c) , und setzt man

$$\begin{aligned} x &= \alpha x' + \beta y', \\ y &= \gamma x' + \delta y', \end{aligned} \quad (1)$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vier bestimmte ganze Zahlen, und x', y' die neuen Variablen bedeuten, so wird

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2,$$

und die Coefficienten a', b', c' der neuen quadratischen Form hängen auf folgende Weise von denen der ursprünglichen Form und von den vier Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ab:

$$\begin{aligned} a' &= a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2 \\ b' &= a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta \\ c' &= a\beta^2 + 2b\beta\delta + c\delta^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Man drückt den Zusammenhang der beiden Formen kurz so aus: die Form $ax^2 + 2bxy + cy^2$ geht durch die *Transformation* oder *Substitution* (1) in die Form $a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2$ über. Die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ heissen der Reihe nach der *erste, zweite, dritte, vierte Coefficient* der Substitution. Da die Wahl der Buchstaben zur Bezeichnung der Variablen von ganz untergeordneter Bedeutung ist, und die Natur der Formen und Substitutionen nur von den Coefficienten abhängt, so drückt man sich häufig noch kürzer so aus: die Form (a, b, c) geht durch die Substitution $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ oder $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ in die Form (a', b', c') über; und diese Ausdrucksweise soll nicht mehr oder weniger sagen, als dass die drei Gleichungen (2) Statt finden. Hierbei ist wohl auf die Stellung der Coefficienten der Formen sowohl, wie derjenigen der Substi-

tution zu achten; behalten wir die eben eingeführten Bezeichnungen bei, so müssen wir z. B. sagen, dass gleichzeitig die Form

$$(a, b, c) \text{ durch die Substitution } \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \text{ in } (a', b', c'),$$

$$(a, b, c) \quad " \quad " \quad " \quad \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \delta & \gamma \end{pmatrix} \quad " \quad (c', b', a'),$$

$$(c, b, a) \quad " \quad " \quad " \quad \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \quad " \quad (a', b', c'),$$

$$(c, b, a) \quad " \quad " \quad " \quad \begin{pmatrix} \delta & \gamma \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad " \quad (c', b', a')$$

übergeht.

Es leuchtet ein, dass jede durch die zweite Form (a', b', c') darstellbare Zahl auch durch die erste Form (a, b, c) dargestellt werden kann; denn wird die Zahl m durch (a', b', c') dargestellt, indem den Variablen x', y' die speciellen Werthe r', s' ertheilt werden, so setze man

$$r = \alpha r' + \beta s', \quad s = \gamma r' + \delta s',$$

und es wird die Form (a, b, c) dieselbe Zahl m darstellen, sobald $x = r, y = s$ gesetzt wird. Man sagt deshalb auch: die Form (a, b, c) *enthält* die Form (a', b', c') , oder deutlicher: die Form (a', b', c') ist unter der Form (a, b, c) *enthalten**); eben weil sämtliche durch (a', b', c') darstellbare Zahlen unter den durch (a, b, c) darstellbaren enthalten sind**).

Von besonderer Wichtigkeit ist die Relation, in welcher die Determinante

$$D' = b'^2 - a'c'$$

der neuen Form zu der der früheren steht; substituirt man für a', b', c' ihre Ausdrücke gemäss den Gleichungen (2), so findet man nach leichten Reductionen

$$D' = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 D;$$

die neue Determinante ist daher stets gleich der alten, multiplicirt mit einer Quadratzahl; beide Determinanten haben also auch dasselbe Vorzeichen. Da wir von vorn herein Formen ausschliessen, deren

*) Gauss: D. A. art. 157.

**) Ueber die Umkehrung dieses Satzes siehe Schering: *Théorèmes relatifs aux formes binaires quadratiques qui représentent les mêmes nombres*, Journal de Mathématiques publ. p. Liouville T. IV. 2^e série. 1859.