Lösung desselben die Theorie der *Transformation* erforderlich, mit welcher wir uns zunächst beschäftigen wollen.

§. 54.

Ebenso wie die Gleichungen der Curven in der analytischen Geometrie ihre Gestalt ändern, wenn ein anderes Coordinatensystem gewählt wird, so geht eine quadratische Form (a, b, c) durch Einführung zweier neuen Variabeln in eine neue quadratische Form (a', b', c') über. Sind nämlich x, y die Variabeln der Form (a, b, c), und setzt man

$$\begin{aligned} x &= \alpha x' + \beta y', \\ y &= \gamma x' + \delta y', \end{aligned} \qquad (1)$$

wo α, β, γ, δ vier bestimmte ganze Zahlen, und x', y' die neuen Variabeln bedeuten, so wird

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2,$$

und die Coefficienten a', b', c' der neuen quadratischen Form hängen auf folgende Weise von denen der ursprünglichen Form und von den vier Coefficienten α, β, γ, δ ab:

$$\begin{aligned} a' &= a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2 \\ b' &= a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta \\ c' &= a\beta^2 + 2b\beta\delta + c\delta^2. \end{aligned} \qquad (2)$$

Man drückt den Zusammenhang der beiden Formen kurz so aus: die Form $ax^2 + 2bxy + cy^2$ geht durch die *Transformation* oder *Substitution* (1) in die Form $a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2$ über. Die Zahlen α, β, γ, δ heissen der Reihe nach der *erste*, *zweite*, *dritte*, *vierte Coefficient* der Substitution. Da die Wahl der Buchstaben zur Bezeichnung der Variabeln von ganz untergeordneter Bedeutung ist, und die Natur der Formen und Substitutionen nur von den Coefficienten abhängt, so drückt man sich häufig noch kürzer so aus: die Form (a, b, c) geht durch die Substitution α, β, γ, δ oder $\binom{\alpha,\ \beta}{\gamma,\ \delta}$ in die Form (a', b', c') über; und diese Ausdrucksweise soll nicht mehr oder weniger sagen, als dass die drei Gleichungen (2) Statt finden. Hierbei ist wohl auf die Stellung der Coefficienten der Formen sowohl, wie derjenigen der Substitution zu achten; behalten wir die eben eingeführten Bezeichnungen bei, so müssen wir z. B. sagen, dass gleichzeitig die Form

$$
\begin{array}{llll}
(a, b, c) & \text{durch die Substitution} & \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} & \text{in } (a', b', c'), \\
(a, b, c) & \text{,, \quad ,, \quad ,,} & \begin{pmatrix} \beta, & \alpha \\ \delta, & \gamma \end{pmatrix} & \text{,, } (c', b', a'), \\
(c, b, a) & \text{,, \quad ,, \quad ,,} & \begin{pmatrix} \gamma, & \delta \\ \alpha, & \beta \end{pmatrix} & \text{,, } (a', b', c'), \\
(c, b, a) & \text{,, \quad ,, \quad ,,} & \begin{pmatrix} \delta, & \gamma \\ \beta, & \alpha \end{pmatrix} & \text{,, } (c', b', a')
\end{array}
$$

übergeht.

Es leuchtet ein, dass jede durch die zweite Form (a', b', c') darstellbare Zahl auch durch die erste Form (a, b, c) dargestellt werden kann; denn wird die Zahl m durch (a', b', c') dargestellt, indem den Variabeln x', y' die speciellen Werthe r', s' ertheilt werden, so setze man

$$r = \alpha r' + \beta s', \quad s = \gamma r' + \delta s',$$

und es wird die Form (a, b, c) dieselbe Zahl m darstellen, sobald $x = r$, $y = s$ gesetzt wird. Man sagt deshalb auch: die Form (a, b, c) *enthält* die Form (a', b', c'), oder deutlicher: die Form (a', b', c') ist unter der Form (a, b, c) *enthalten* *); eben weil sämmtliche durch (a', b', c') darstellbare Zahlen unter den durch (a, b, c) darstellbaren enthalten sind**).

Von besonderer Wichtigkeit ist die Relation, in welcher die Determinante

$$D' = b'^2 - a'c'$$

der neuen Form zu der der früheren steht; substituirt man für a', b', c' ihre Ausdrücke gemäss den Gleichungen (2), so findet man nach leichten Reductionen

$$D' = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 D;$$

die neue Determinante ist daher stets gleich der alten, multiplicirt mit einer Quadratzahl; beide Determinanten haben also auch dasselbe Vorzeichen. Da wir von vorn herein Formen ausschliessen, deren

*) *Gauss: D. A.* art. 157.

**) Ueber die Umkehrung dieses Satzes siehe *Schering: Théorèmes relatifs aux formes binaires quadratiques qui représentent les mêmes nombres*, Journal de Mathématiques publ. p. Liouville T. IV. 2e série. 1859.