

## Werk

**Titel:** Vorlesungen über Zahlentheorie

**Autor:** Dirichlet, Peter

**Verlag:** Vieweg

**Ort:** Braunschweig

**Jahr:** 1871

**Kollektion:** Mathematica

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN30976923X

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X>

**LOG Id:** LOG\_0064

**LOG Titel:** S. 56. Eigentliche und uneigentliche Aequivalenz der Formen

**LOG Typ:** chapter

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

zwei Substitutionen anzudeuten, wollen wir uns bisweilen der Bezeichnung

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha', & \beta' \\ \gamma', & \delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha' + \beta\gamma', & \alpha\beta' + \beta\delta' \\ \gamma\alpha' + \delta\gamma', & \gamma\beta' + \delta\delta' \end{pmatrix}$$

bedienen; offenbar ist es im Allgemeinen nicht erlaubt, die Ordnung der beiden successiven Substitutionen umzukehren, weil hierdurch auch die resultirende Substitution geändert würde. So ist z. B.  $\begin{pmatrix} +1, & 0 \\ -1, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +1, & +2 \\ -1, & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1, & +2 \\ -2, & -5 \end{pmatrix}$ ; dagegen  $\begin{pmatrix} +1, & +2 \\ -1, & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +1, & 0 \\ -1, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1, & +2 \\ +2, & -3 \end{pmatrix}$ .

Dagegen ist es bei drei successiven Substitutionen  $S, S', S''$  gleichgültig, ob man erst  $S$  und  $S'$  zusammensetzt, und dann das Resultat  $SS'$  mit  $S''$  verbindet, oder ob man  $S$  mit dem Resultat  $S'S''$  der zweiten und dritten Substitution zusammensetzt; in Zeichen:

$$(SS')S'' = S(S'S'').$$

Dies folgt unmittelbar aus dem Begriffe dieser Zusammensetzung; denn sind  $(x, y), (x', y'), (x'', y'')$  und  $(x''', y''')$  die successiven Variablen, so ist es für die Ausdrücke von  $x, y$  durch  $x''', y'''$  gleichgültig, ob man die Variablen  $x'', y''$  oder die Variablen  $x', y'$  als Zwischenglieder einschiebt.

Ferner ist für die Folge zu bemerken, dass die Substitution  $\begin{pmatrix} +1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$  bei der Zusammensetzung stets fortgelassen werden darf, da sie keine Aenderung hervorbringt.

Endlich leuchtet ein, dass der obige Satz auch so ausgesprochen werden kann: *Die aus den Substitutionen  $S, S', S'' \dots$  zusammengesetzte Substitution  $SS'S'' \dots$  ist eigentlich oder uneigentlich, je nachdem die Anzahl der unter ihnen befindlichen uneigentlichen Substitutionen gerade oder ungerade ist.*

## §. 56.

Besonders wichtig ist nun die Frage: wann enthalten zwei Formen sich gegenseitig? Offenbar ist dann das System aller durch die eine Form darstellbaren Zahlen identisch mit dem System derjenigen Zahlen, welche durch die andere Form dargestellt werden können. Zwei solche Formen werden wir *äquivalent* \*) nennen. Sind  $D, D'$  ihre Determinanten, so muss sowohl  $D':D$ , als auch

\*) Gauss: D. A. art. 157.

$D : D'$ , eine ganze Quadratzahl, also eine ganze positive Zahl sein, und hieraus folgt als eine für die Aequivalenz zweier Formen *erforderliche* Bedingung, dass ihre Determinanten  $D$  und  $D'$  gleich sein müssen.

Diese Bedingung ist aber umgekehrt nicht hinreichend, um auf die Aequivalenz schliessen zu können. Dies ist erst dann gestattet, wenn man ausserdem weiss, dass die eine der beiden Formen die andere enthält. In der That, wenn die beiden Formen  $(a, b, c)$  und  $(a', b', c')$  gleiche Determinanten haben, und wenn ausserdem die erstere durch die Substitution

$$\begin{aligned} x &= \alpha x' + \beta y' \\ y &= \gamma x' + \delta y' \end{aligned}$$

in die letztere übergeht, so folgt aus der Relation

$$D' = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 D$$

und der Gleichheit von  $D'$  und  $D$  die Gleichung

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$$

und hieraus, wenn man zur Abkürzung  $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1 = \varepsilon$  setzt,

$$\begin{aligned} x' &= +\varepsilon\delta x - \varepsilon\beta y \\ y' &= -\varepsilon\gamma x + \varepsilon\alpha y \end{aligned}$$

und es geht daher durch diese Substitution mit ganzzahligen Coefficienten die Form  $(a', b', c')$  in die Form  $(a, b, c)$  über; also sind in der That beide Formen einander äquivalent. Die Substitutionen

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} +\varepsilon\delta, & -\varepsilon\beta \\ -\varepsilon\gamma, & +\varepsilon\alpha \end{pmatrix},$$

deren jede die inverse der andern heisst, und durch deren Zusammensetzung immer die Substitution  $\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$  entsteht, sind offenbar entweder beide eigentlich, oder beide uneigentlich; je nachdem das Eine oder das Andere Statt findet, sollen die beiden Formen *eigentlich* oder *uneigentlich äquivalent*\*) heissen.

Sowie wir eben gesehen haben, dass die eine von zwei äquivalenten Formen in die andere immer durch eine Substitution  $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$  übergeht, in welcher  $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$  ist, so leuchtet auch umgekehrt ein, dass durch jede solche Substitution eine beliebige Form nothwendig in eine ihr äquivalente transformirt wird; denn die Determinanten beider Formen sind einander gleich. Hierin

\*) Gauss: D. A. art. 158.