zwei Substitutionen anzudeuten, wollen wir uns bisweilen der Bezeichnung

$$\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha', & \beta'\\ \gamma', & \delta'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\alpha' + \beta\gamma', & \alpha\beta' + \beta\delta'\\ \gamma\alpha' + \delta\gamma', & \gamma\beta' + \delta\delta'\end{pmatrix}$$

bedienen; offenbar ist es im Allgemeinen nicht erlaubt, die Ordnung der beiden successiven Substitutionen umzukehren, weil hierdurch auch die resultirende Substitution geändert würde. So ist z. B. $\begin{pmatrix}+1, & 0\\ -1, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+1, & +2\\ -1, & -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}+1, & +2\\ -2, & -5\end{pmatrix}$; dagegen $\begin{pmatrix}+1, & +2\\ -1, & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+1, & 0\\ -1, & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1, & +2\\ +2, & -3\end{pmatrix}$.

Dagegen ist es bei drei successiven Substitutionen S, S', S'' gleichgültig, ob man erst S und S' zusammensetzt, und dann das Resultat SS' mit S'' verbindet, oder ob man S mit dem Resultat $S'S''$ der zweiten und dritten Substitution zusammensetzt; in Zeichen:

$$(SS')S'' = S(S'S'').$$

Dies folgt unmittelbar aus dem Begriffe dieser Zusammensetzung; denn sind (x, y), (x', y'), (x'', y'') und (x''', y''') die successiven Variabeln, so ist es für die Ausdrücke von x, y durch x''', y''' gleichgültig, ob man die Variabeln x'', y'' oder die Variabeln x', y' als Zwischenglieder einschiebt.

Ferner ist für die Folge zu bemerken, dass die Substitution $\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}$ bei der Zusammensetzung stets fortgelassen werden darf, da sie keine Aenderung hervorbringt.

Endlich leuchtet ein, dass der obige Satz auch so ausgesprochen werden kann: *Die aus den Substitutionen S, S', S'' ... zusammengesetzte Substitution $SS'S''$ ... ist eigentlich oder uneigentlich, je nachdem die Anzahl der unter ihnen befindlichen uneigentlichen Substitutionen gerade oder ungerade ist.*

§. 56.

Besonders wichtig ist nun die Frage: wann enthalten zwei Formen sich gegenseitig? Offenbar ist dann das System aller durch die eine Form darstellbaren Zahlen identisch mit dem System derjenigen Zahlen, welche durch die andere Form dargestellt werden können. Zwei solche Formen werden wir *äquivalent* *) nennen. Sind D, D' ihre Determinanten, so muss sowohl $D' : D$, als auch

*) *Gauss*: *D. A.* art. 157.

$D:D'$, eine ganze Quadratzahl, also eine ganze positive Zahl sein, und hieraus folgt als eine für die Aequivalenz zweier Formen *erforderliche* Bedingung, dass ihre Determinanten D und D' gleich sein müssen.

Diese Bedingung ist aber umgekehrt *nicht hinreichend*, um auf die Aequivalenz schliessen zu können. Dies ist erst dann gestattet, wenn man ausserdem weiss, dass die eine der beiden Formen die andere enthält. In der That, wenn die beiden Formen (a, b, c) und (a', b', c') gleiche Determinanten haben, und wenn ausserdem die erstere durch die Substitution

$$x = \alpha x' + \beta y'$$
$$y = \gamma x' + \delta y'$$

in die letztere übergeht, so folgt aus der Relation

$$D' = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 D$$

und der Gleichheit von D' und D die Gleichung

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$$

und hieraus, wenn man zur Abkürzung $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1 = \varepsilon$ setzt,

$$x' = +\varepsilon\delta x - \varepsilon\beta y$$
$$y' = -\varepsilon\gamma x + \varepsilon\alpha y$$

und es geht daher durch diese Substitution mit ganzzahligen Coefficienten die Form (a', b', c') in die Form (a, b, c) über; also sind in der That beide Formen einander äquivalent. Die Substitutionen

$$\begin{pmatrix}\alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta\end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix}+\varepsilon\delta, & -\varepsilon\beta \\ -\varepsilon\gamma, & +\varepsilon\alpha\end{pmatrix},$$

deren jede die *inverse* der andern heisst, und durch deren Zusammensetzung immer die Substitution $\binom{1,\ 0}{0,\ 1}$ entsteht, sind offenbar entweder beide eigentlich, oder beide uneigentlich; je nachdem das Eine oder das Andere Statt findet, sollen die beiden Formen *eigentlich* oder *uneigentlich äquivalent**) heissen.

Sowie wir eben gesehen haben, dass die eine von zwei äquivalenten Formen in die andere immer durch eine Substitution $\binom{\alpha,\ \beta}{\gamma,\ \delta}$ übergeht, in welcher $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ ist, so leuchtet auch umgekehrt ein, dass durch jede solche Substitution eine beliebige Form nothwendig in eine ihr äquivalente transformirt wird; denn die Determinanten beider Formen sind einander gleich. Hierin

*) *Gauss: D. A.* art. 158.