besteht also die *erforderliche und hinreichende* Bedingung für die Aequivalenz zweier Formen.

Aus dem Begriffe der Aequivalenz ergiebt sich unmittelbar, dass jede Form sich selbst eigentlich äquivalent ist; denn sie geht durch die eigentliche Substitution $\binom{1,\ 0}{0,\ 1}$ in sich selbst über. Dies ist nur ein specieller Fall des folgenden Satzes, welcher sehr oft zur Anwendung kommen wird: *Wenn zwei Formen* (a, b, c) *und* (a, b', c') *von gleicher Determinante* D *denselben ersten Coefficienten* a *haben, und wenn ihre mittleren Coefficienten* b, b' *einander congruent sind in Bezug auf den Modul* a, *so dass* $b' = a\beta + b$; *so sind die beiden Formen eigentlich äquivalent, und die erstere geht durch die eigentliche Substitution* $\binom{1,\ \beta}{0,\ 1}$ *in die letztere über.*

Ferner bemerke man folgende Fälle der uneigentlichen Aequivalenz: Zwei *entgegengesetzte**) Formen (*formae oppositae*), d. h. zwei Formen (a, b, c) und $(a, -b, c)$, welche sich nur durch das Vorzeichen des mittlern Coefficienten unterscheiden, sind stets *uneigentlich* äquivalent, indem die eine durch die Substitution $\binom{1,\ \ 0}{0,\ -1}$ in die andere übergeht. Dasselbe gilt von zwei *Gefährten***) (*formae sociae*), d. h. von zwei Formen (a, b, c) und (c, b, a), welche dieselben Coefficienten, nur in umgekehrter Folge, haben; die eine geht in die andere durch die Substitution $\binom{0,\ 1}{1,\ 0}$ über.

Aus diesen beiden Fällen folgt wieder durch Zusammensetzung, dass die beiden Formen (a, b, c) und $(c, -b, a)$ *eigentlich* äquivalent sind; denn die erstere geht in die letztere durch die Substitution $\binom{0,\ 1}{-1,\ 0}$ über.

§. 57.

Auch hier bei der Aequivalenz schliesst die eine Art derselben die andere nicht aus; es kommt häufig der Fall vor, dass zwei Formen einander sowohl eigentlich als uneigentlich äquivalent sind; in dem oben (§. 54) angeführten Beispiel sind wirklich die beiden Formen $(3, 13, 18)$ und $(-5, -5, 18)$ eigentlich und uneigentlich äquivalent; die erstere geht durch die Substitutionen

*) *Gauss: D. A.* art. 159.

**) *Gauss: D. A.* art. 187.

$\binom{+1,\ 0}{-1,\ 1}$ und $\binom{+1,\ +2}{-1,\ -3}$ in die letztere über, und umgekehrt diese in jene durch die inversen Substitutionen $\binom{1,\ 0}{1,\ 1}$ und $\binom{+3,\ +2}{-1,\ -1}$.

Wenn zwei Formen sowohl eigentlich als uneigentlich äquivalent sind, so ist jede von ihnen sich selbst uneigentlich äquivalent.

Denn, wenn die Form (a, b, c) durch jede der beiden Substitutionen

$$\begin{pmatrix}\alpha', & \beta' \\ \gamma', & \delta'\end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix}\alpha'', & \beta'' \\ \gamma'', & \delta''\end{pmatrix},$$

in denen

$$\alpha'\delta' - \beta'\gamma' = +1, \quad \alpha''\delta'' - \beta''\gamma'' = -1,$$

in die Form (a', b', c') übergeht, so geht (a', b', c') durch jede der beiden inversen Substitutionen

$$\begin{pmatrix}+\delta', & -\beta' \\ -\gamma', & +\alpha'\end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix}-\delta'', & +\beta'' \\ +\gamma'', & -\alpha''\end{pmatrix}$$

in (a, b, c) über; und hieraus folgt, dass (a, b, c) durch jede der beiden zusammengesetzten, und zwar nothwendig uneigentlichen Substitutionen

$$\begin{pmatrix}\alpha', & \beta' \\ \gamma', & \delta'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\delta'', & +\beta'' \\ +\gamma'', & -\alpha''\end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix}\alpha'', & \beta'' \\ \gamma'', & \delta''\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\delta', & -\beta' \\ -\gamma', & +\alpha'\end{pmatrix}$$

in sich selbst übergeht. So z. B. geht die Form (3, 13, 18) durch die uneigentlichen Substitutionen $\binom{+1,\ 0}{-1,\ 1}\binom{+3,\ +2}{-1,\ -1} = \binom{+3,\ +2}{-4,\ -3}$ und $\binom{+1,\ +2}{-1,\ -3}\binom{1,\ 0}{1,\ 1} = \binom{+3,\ +2}{-4,\ -3}$ in sich selbst über.

Es ist kein Zufall, dass diese beiden auf verschiedene Art zusammengesetzten Substitutionen identisch ausfallen; setzt man nämlich

$$\begin{pmatrix}\alpha', & \beta' \\ \gamma', & \delta'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\delta'', & +\beta'' \\ +\gamma'', & -\alpha''\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta\end{pmatrix},$$

so findet man zunächst

$$\begin{pmatrix}\alpha'', & \beta'' \\ \gamma'', & \delta''\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\delta', & -\beta' \\ -\gamma', & +\alpha'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\delta, & +\beta \\ +\gamma, & -\alpha\end{pmatrix},$$

und wir haben daher, um die Identität dieser beiden Substitutionen nachzuweisen, nur noch zu zeigen, dass in jeder uneigentlichen Substitution $\binom{\alpha,\ \beta}{\gamma,\ \delta}$, durch welche eine Form in sich selbst übergeht, stets der erste und vierte Coefficient einander gleich, aber entgegengesetzt sind. Dies geschieht leicht auf folgende Weise. Wenn die Form (a, b, c) durch die uneigentliche Substitution $\binom{\alpha,\ \beta}{\gamma,\ \delta}$ in sich selbst übergeht, so ist

$$a\alpha^2 + (2b\alpha + c\gamma)\gamma = a$$
$$a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta = b$$
$$\alpha\delta - \beta\gamma = -1.$$