Die zweite dieser drei Gleichungen geht, wenn man der dritten gemäss $\beta\gamma$ durch $\alpha\delta + 1$ ersetzt, in folgende über:

$$a\alpha\beta + (2b\alpha + c\gamma)\delta = 0;$$

eliminirt man aus dieser und aus der ersten jener drei Gleichungen die Grösse $2b\alpha + c\gamma$, so erhält man, wenn man den Factor a wegwirft (der ja von Null verschieden ist, weil sonst die Determinante D eine Quadratzahl wäre), die Relation

$$(\alpha^2 - 1)\delta = \alpha\beta\gamma,$$

woraus mit Rücksicht auf $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$ wirklich folgt, dass $\delta = -\alpha$ ist, was zu beweisen war.

§. 58.

Jede uneigentliche Substitution, durch welche eine Form (a, b, c) in sich selbst übergeht, ist daher nothwendig von der Form $\binom{\alpha,\ +\beta}{\gamma,\ -\alpha}$, und es ist also gleichzeitig $\alpha^2 + \beta\gamma = 1$. Von besonderm Interesse ist der specielle Fall $\gamma = 0$; dann ist $\alpha = \pm 1$ und entsprechend $\pm a\beta = 2b$; eine solche Form, deren doppelter mittlerer Coefficient durch den ersten theilbar ist, soll eine *ambige* Form (*forma anceps*) heissen*). Und umgekehrt ist leicht zu sehen, dass jede ambige Form sich selbst uneigentlich äquivalent ist; denn wenn (a, b, c) eine solche Form, und also $2b = a\beta$ ist, so geht (a, b, c) wirklich durch die uneigentliche Substitution $\binom{1,\ +\beta}{0,\ -1}$ in sich selbst über. Dasselbe gilt offenbar von jeder Form, welche einer ambigen Form äquivalent ist; aber es besteht auch der umgekehrte Satz: **)

Wenn eine Form sich selbst uneigentlich äquivalent ist, so giebt es stets eine ihr äquivalente ambige Form.

Beweis. Es sei φ eine solche Form, welche durch die uneigentliche Substitution $\binom{\alpha,\ +\beta}{\gamma,\ -\alpha}$ in sich selbst übergeht; ist $\gamma = 0$, so wissen wir, dass φ selbst eine ambige Form, und folglich der Satz richtig ist. Ist aber γ von Null verschieden, so suchen wir eine eigentliche Substitution $\binom{\lambda,\ \mu}{\nu,\ \varrho}$, durch welche die Form φ in eine ihr äquivalente ambige Form übergeht, die wir mit ψ bezeichnen wollen. Da also $\lambda\varrho - \mu\nu = +1$, und folglich ψ durch die

*) *Gauss: D. A.* art. 163. Vergl. *Kummer* im Monatsbericht der Berliner Akademie vom 18. Februar 1858.

**) *Gauss: D. A.* art. 164.

inverse Substitution $\binom{\pm\varrho, \mp\mu}{-\nu, +\lambda}$ in φ übergeht, so muss ψ durch die offenbar uneigentliche, aus den drei successiven Substitutionen

$$\begin{pmatrix} +\varrho, & -\mu \\ -\nu, & +\lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha, & +\beta \\ \gamma, & -\alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda, & \mu \\ \nu, & \varrho \end{pmatrix}$$

zusammengesetzte Substitution in sich selbst übergehen. Der dritte Coefficient dieser Substitution ist

$$\gamma\lambda^2 - 2\alpha\lambda\nu - \beta\nu^2,$$

und es kommt nur darauf an, zwei relative Primzahlen λ, ν so zu bestimmen, dass dieser Coefficient $= 0$ wird; denn dann ist ψ eine ambige Form. Diese Forderung reducirt sich, wenn man mit γ multiplicirt und bedenkt, dass $\alpha^2 + \beta\gamma = 1$ ist, auf die folgende:

$$(\gamma\lambda - \alpha\nu)^2 - \nu^2 = 0; \quad \frac{\lambda}{\nu} = \frac{\alpha \pm 1}{\gamma} = \frac{-\beta}{\alpha \mp 1};$$

da unserer Annahme nach γ von Null verschieden ist, so kann man also λ und ν dieser Forderung gemäss bestimmen, und zwar als relative Primzahlen, wenn man den Bruch $(\alpha \pm 1) : \gamma$ auf seine kleinste Benennung $\lambda : \nu$ bringt. Dies Letztere ist erforderlich, weil ja die vier Coefficienten λ, μ, ν, ϱ der Gleichung $\lambda\varrho - \mu\nu = 1$ genügen müssen. Sobald nun λ und ν auf dem angegebenen Wege bestimmt sind, so kann man dann unendlich viele Werthenpaare für ϱ und μ (nach §. 24) finden, welche diese letzte Forderung erfüllen. Auf diese Weise ist also wirklich aus $\binom{\alpha, +\beta}{\gamma, -\alpha}$ eine eigentliche Substitution $\binom{\lambda, \mu}{\nu, \varrho}$ gefunden, welche die gegebene Form φ in eine ihr äquivalente ambige Form ψ transformirt, und hierdurch der obige Satz bewiesen.

Nehmen wir als Beispiel die obige Form (3, 13, 18), welche durch die uneigentliche Substitution $\binom{+3, +2}{-4, -3}$ in sich selbst übergeht; wir haben also nur

$$\frac{\lambda}{\nu} = \frac{3 \pm 1}{-4}$$

zu setzen; nehmen wir das obere Zeichen, so ist $\lambda = \pm 1$, $\nu = \mp 1$ zu setzen, und entsprechend $\varrho + \mu = \pm 1$. Nehmen wir die obern Zeichen und $\varrho = 1$, $\mu = 0$, so erhalten wir die Substitution $\binom{+1, 0}{-1, 1}$, durch welche, wie schon oben bemerkt ist, die Form (3, 13, 18) in die Form $(-5, -5, 18)$ übergeht, welche in der That eine ambige Form ist.

Ferner: Die Form $(7, 1, -1)$ geht durch die uneigentliche