

## Werk

**Titel:** Vorlesungen über Zahlentheorie

**Autor:** Dirichlet, Peter

**Verlag:** Vieweg

**Ort:** Braunschweig

**Jahr:** 1871

**Kollektion:** Mathematica

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN30976923X

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X>

**LOG Id:** LOG\_0066

**LOG Titel:** S. 58. Ambige Formen. Jede sich selbst uneigentlich äquivalente Form ist einer ambigen Form äquivalent

**LOG Typ:** chapter

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

Die zweite dieser drei Gleichungen geht, wenn man der dritten gemäss  $\beta\gamma$  durch  $\alpha\delta + 1$  ersetzt, in folgende über:

$$a\alpha\beta + (2b\alpha + c\gamma)\delta = 0;$$

eliminiert man aus dieser und aus der ersten jener drei Gleichungen die Grösse  $2b\alpha + c\gamma$ , so erhält man, wenn man den Factor  $a$  wegwirft (der ja von Null verschieden ist, weil sonst die Determinante  $D$  eine Quadratzahl wäre), die Relation

$$(\alpha^2 - 1)\delta = \alpha\beta\gamma,$$

woraus mit Rücksicht auf  $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$  wirklich folgt, dass  $\delta = -\alpha$  ist, was zu beweisen war.

### §. 58.

Jede uneigentliche Substitution, durch welche eine Form  $(a, b, c)$  in sich selbst übergeht, ist daher nothwendig von der Form  $\begin{pmatrix} \alpha & +\beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$ , und es ist also gleichzeitig  $\alpha^2 + \beta\gamma = 1$ . Von besonderem Interesse ist der specielle Fall  $\gamma = 0$ ; dann ist  $\alpha = \pm 1$  und entsprechend  $\pm a\beta = 2b$ ; eine solche Form, deren doppelter mittlerer Coefficient durch den ersten theilbar ist, soll eine *ambige* Form (*forma anceps*) heissen\*). Und umgekehrt ist leicht zu sehen, dass jede ambige Form sich selbst uneigentlich äquivalent ist; denn wenn  $(a, b, c)$  eine solche Form, und also  $2b = a\beta$  ist, so geht  $(a, b, c)$  wirklich durch die uneigentliche Substitution  $\begin{pmatrix} 1 & +\beta \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  in sich selbst über. Dasselbe gilt offenbar von jeder Form, welche einer ambigen Form äquivalent ist; aber es besteht auch der umgekehrte Satz:\*\*)

*Wenn eine Form sich selbst uneigentlich äquivalent ist, so giebt es stets eine ihr äquivalente ambige Form.*

*Beweis.* Es sei  $\varphi$  eine solche Form, welche durch die uneigentliche Substitution  $\begin{pmatrix} \alpha & +\beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$  in sich selbst übergeht; ist  $\gamma = 0$ , so wissen wir, dass  $\varphi$  selbst eine ambige Form, und folglich der Satz richtig ist. Ist aber  $\gamma$  von Null verschieden, so suchen wir eine eigentliche Substitution  $\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \nu & \rho \end{pmatrix}$ , durch welche die Form  $\varphi$  in eine ihr äquivalente ambige Form übergeht, die wir mit  $\psi$  bezeichnen wollen. Da also  $\lambda\rho - \mu\nu = +1$ , und folglich  $\psi$  durch die

\*) Gauss: D. A. art. 163. Vergl. Kummer im Monatsbericht der Berliner Akademie vom 18. Februar 1858.

\*\*) Gauss: D. A. art. 164.

inverse Substitution  $\left(\begin{smallmatrix} +\varrho & -\mu \\ -\nu & +\lambda \end{smallmatrix}\right)$  in  $\varphi$  übergeht, so muss  $\psi$  durch die offenbar uneigentliche, aus den drei successiven Substitutionen

$$\left(\begin{smallmatrix} +\varrho & -\mu \\ -\nu & +\lambda \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} \alpha & +\beta \\ \gamma & -\alpha \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} \lambda & \mu \\ \nu & \varrho \end{smallmatrix}\right)$$

zusammengesetzte Substitution in sich selbst übergehen. Der dritte Coefficient dieser Substitution ist

$$\gamma\lambda^2 - 2\alpha\lambda\nu - \beta\nu^2,$$

und es kommt nur darauf an, zwei relative Primzahlen  $\lambda, \nu$  so zu bestimmen, dass dieser Coefficient  $= 0$  wird; denn dann ist  $\psi$  eine ambige Form. Diese Forderung reducirt sich, wenn man mit  $\gamma$  multiplicirt und bedenkt, dass  $\alpha^2 + \beta\gamma = 1$  ist, auf die folgende:

$$(\gamma\lambda - \alpha\nu)^2 - \nu^2 = 0; \quad \frac{\lambda}{\nu} = \frac{\alpha \pm 1}{\gamma} = \frac{-\beta}{\alpha \mp 1};$$

da unserer Annahme nach  $\gamma$  von Null verschieden ist, so kann man also  $\lambda$  und  $\nu$  dieser Forderung gemäss bestimmen, und zwar als relative Primzahlen, wenn man den Bruch  $(\alpha \pm 1) : \gamma$  auf seine kleinste Benennung  $\lambda : \nu$  bringt. Dies Letztere ist erforderlich, weil ja die vier Coefficienten  $\lambda, \mu, \nu, \varrho$  der Gleichung  $\lambda\varrho - \mu\nu = 1$  genügen müssen. Sobald nun  $\lambda$  und  $\nu$  auf dem angegebenen Wege bestimmt sind, so kann man dann unendlich viele Werthenpaare für  $\varrho$  und  $\mu$  (nach §. 24) finden, welche diese letzte Forderung erfüllen. Auf diese Weise ist also wirklich aus  $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & +\beta \\ \gamma & -\alpha \end{smallmatrix}\right)$  eine eigentliche Substitution  $\left(\begin{smallmatrix} \lambda & \mu \\ \nu & \varrho \end{smallmatrix}\right)$  gefunden, welche die gegebene Form  $\varphi$  in eine ihr äquivalente ambige Form  $\psi$  transformirt, und hierdurch der obige Satz bewiesen.

Nehmen wir als Beispiel die obige Form (3, 13, 18), welche durch die uneigentliche Substitution  $\left(\begin{smallmatrix} +3 & +2 \\ -4 & -3 \end{smallmatrix}\right)$  in sich selbst übergeht; wir haben also nur

$$\frac{\lambda}{\nu} = \frac{3 \pm 1}{-4}$$

zu setzen; nehmen wir das obere Zeichen, so ist  $\lambda = \pm 1, \nu = \mp 1$  zu setzen, und entsprechend  $\varrho + \mu = \pm 1$ . Nehmen wir die obere Zeichen und  $\varrho = 1, \mu = 0$ , so erhalten wir die Substitution  $\left(\begin{smallmatrix} +1 & 0 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ , durch welche, wie schon oben bemerkt ist, die Form (3, 13, 18) in die Form  $(-5, -5, 18)$  übergeht, welche in der That eine ambige Form ist.

Ferner: Die Form (7, 1, -1) geht durch die uneigentliche