

Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie

Autor: Dirichlet, Peter

Verlag: Vieweg

Ort: Braunschweig

Jahr: 1871

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN30976923X

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X>

LOG Id: LOG_0067

LOG Titel: §, 59. Eintheilung aller Formen von einer bestimmten Determinante in Classen; vollständiges System nicht äquivalenter Formen. Zwei Hauptprobleme der Lehre von der Aequivalenz

LOG Typ: chapter

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Substitution $\begin{pmatrix} +2 & +1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ in sich selbst über; in diesem Fall haben wir also

$$\frac{\lambda}{\nu} = \frac{2 \pm 1}{-3}$$

zu setzen; nehmen wir der Einfachheit halber wieder das obere Zeichen, so können wir wieder $\lambda = 1$, $\nu = -1$, $\rho = 1$, $\mu = 0$ setzen; und in der That geht die Form (7, 1, -1) durch die Substitution $\begin{pmatrix} +1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ in die ambige Form (4, 2, -1) über.

§. 59.

Wir verlassen hiermit diesen interessanten Gegenstand und beschäftigen uns von jetzt an ausschliesslich mit der *eigentlichen* Aequivalenz; nur diese soll im Folgenden gemeint sein, wenn schlechthin von Aequivalenz gesprochen wird; ebenso soll unter Substitution immer nur noch die *eigentliche* Substitution verstanden sein. Werden daher zwei Formen f, f' äquivalent genannt, so bedeutet dieser Ausdruck stets (§. 56), dass eine Substitution $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ existirt, deren Coefficienten der Bedingung $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$ genügen, und durch welche f in f' übergeht; umgekehrt geht dann f' in f über durch die inverse Substitution $\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$, deren Coefficienten derselben Bedingung $\delta\alpha - (-\beta)(-\gamma) = +1$ genügen. Aus dem allgemeinen Satze des §. 55 geht nun folgender specieller hervor: *Sind zwei Formen einer dritten äquivalent, so sind sie auch einander äquivalent*; und dieser Satz bildet die Grundlage für den wichtigsten Begriff in der ganzen Theorie der quadratischen Formen.

Es sei f eine bestimmte gegebene Form von der Determinante D , und F der Inbegriff aller der Formen $f, f', f'' \dots$, welche mit f äquivalent sind; zufolge des eben erwähnten Satzes sind nun je zwei in dem System F vorkommende Formen f', f'' ebenfalls äquivalent; ist daher f' irgend eine in F vorkommende Form, so ist das System aller mit f' äquivalenten Formen identisch mit dem System F . Ein solches System unter einander äquivalenter Formen soll eine *Classe von Formen* *) oder eine *Formenclasse* heissen, und es leuchtet ein, dass durch irgend ein Individuum einer solchen Classe alle anderen derselben Classe angehörenden Formen vollständig be-

*) Gauss: *D. A.* art. 223.

stimmt sind; man kann daher immer ein solches Individuum als *Repräsentanten der Formenklasse* ansehen.

Es würde nicht schwer sein zu beweisen, dass es in jeder solchen Formenklasse unendlich viele Individuen giebt, d. h. dass die Anzahl der Formen, in welche eine gegebene Form f durch die unendlich vielen verschiedenen Substitutionen $(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix})$ übergeht, in denen $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$, unendlich gross ist, obgleich es vorkommen kann, und zwar bei positiven Determinanten immer vorkommt, dass unendlich viele von diesen Substitutionen die Form f nur in eine und dieselbe Form f' transformiren; allein dieser Nachweis hat für uns zunächst kein Interesse. Von grösserer Wichtigkeit und von dem grössten Interesse ist dagegen die folgende Betrachtung.

Denkt man sich alle Formen von einer und derselben Determinante D in ihre verschiedenen Classen eingetheilt, und wählt man aus jeder Classe nach Belieben eine Form als Repräsentanten derselben, so erhält man ein sogenanntes *vollständiges System nicht äquivalenter Formen* für diese Determinante D ; die fundamentale und vollständig charakteristische Eigenschaft eines solchen vollständigen Formensystems S besteht darin, dass jede beliebige Form von der Determinante D stets einer, aber auch nur einer von den in diesem System S enthaltenen Formen äquivalent ist. Die Anzahl dieser verschiedenen Classen (und also auch ihrer Repräsentanten in dem vollständigen Formensystem S) ist nun, wie sich zunächst für negative, später auch für positive Determinanten herausstellen wird, eine *endliche*, und wir bezeichnen absichtlich schon jetzt die genaue Bestimmung dieser *Classenanzahl für eine gegebene Determinante*, welche innig mit den schönsten algebraischen und analytischen Untersuchungen dieses Jahrhunderts verknüpft ist, als die letzte und hauptsächlichste von uns zu lösende Aufgabe.

Der Weg zu diesem Ziele wird gebahnt durch die Lösung der beiden folgenden Hauptprobleme in der Theorie der Aequivalenz:

I. *Zu entscheiden, ob zwei gegebene Formen von gleicher Determinante äquivalent sind, also derselben Classe angehören, oder nicht.*

II. *Alle Substitutionen zu finden, durch welche die eine von zwei gegebenen äquivalenten Formen in die andere übergeht.*

Es wird aber gut sein, die Beschäftigung mit diesen beiden Problemen dadurch zu motiviren, dass wir zeigen, wie die Theorie der *Darstellung* der Zahlen durch quadratische Formen vollständig