Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie
Autor: Dirichlet, Peter
Verlag: Vieweg
Ort: Braunschweig
Jahr: 1871
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN30976923X
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X

LOG Id: LOG_0073
LOG Titel: §. 65. Ausnahmefälle, in welchen zwei nicht identische reducirte Formen äquivalent sind.
LOG Typ: chapter

$$\begin{pmatrix} 0, & +1 \\ -1, & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, & +1 \\ -1, & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1, & -1 \\ +2, & +1 \end{pmatrix}$$

in die Form (4, 2, 51), dagegen durch die Substitution

$$\begin{pmatrix} 0, & +1 \\ -1, & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1, & +0 \\ +2, & -1 \end{pmatrix}$$

in die Form (4, — 2, 51) über. Man sieht aus diesem Beispiele wie einfach der angegebene Algorithmus sich gestaltet.

§. 65.

Wir sehen ferner an dem eben behandelten Beispiele, dass eine und dieselbe Form zwei verschiedenen reducirten Formen äquivalent sein kann, woraus folgt, dass auch zwei verschiedene reducirte Formen unter einander äquivalent sein, also derselben Classe angehören können. Da es von grosser Wichtigkeit ist, dies allgemein zu untersuchen, so stellen wir uns die Frage:

Wann sind zwei reducirte Formen (a, b, c) und (a', b', c') von gleicher negativer Determinante $D = -\varDelta$ einander äquivalent?

Zunächst ziehen wir einige Folgerungen aus den beiden Bedingungen

$$2(b) \leqq a, \quad a \leqq c,$$

welche ausdrücken, dass die Form (a, b, c) eine reducirte ist. Es ergiebt sich nämlich aus der erstern $4b^2 \leqq a^2$, aus der letztern $a^2 \leqq ac$, also auch $4b^2 \leqq ac$ oder $3b^2 \leqq ac - b^2$, folglich

$$(b) \leqq \sqrt{\tfrac{1}{3}\varDelta}.$$

Hieraus folgt weiter, dass $3ac = 3\varDelta + 3b^2 \leqq 4\varDelta$ und, da $a^2 \leqq ac$ ist, dass

$$a \leqq \sqrt{\tfrac{4}{3}\varDelta}$$

ist.

Nehmen wir jetzt an, die beiden reducirten Formen (a, b, c), (a', b', c') seien äquivalent, so dürfen wir, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, voraussetzen, dass

$$a' \leqq a$$

ist. Es sei nun $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ die Substitution, durch welche (a, b, c) in (a', b', c') übergeht, also

$$1 = \alpha\delta - \beta\gamma \tag{1}$$
$$a' = a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2 \tag{2}$$
$$b' = a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta. \tag{3}$$

Multipliciren wir die Gleichung (2) mit a, so ergiebt sich

$$aa' = (a\alpha + b\gamma)^2 + \Delta\gamma^2;$$

$aa' < \frac{4D}{3}$

$aa' > D\gamma^2$

da nun sowohl a, als auch $a' \leqq \sqrt{\frac{4}{3}\Delta}$, und also

$$aa' \leqq \tfrac{4}{3}\Delta$$

ist, so folgt, dass in der vorstehenden Gleichung γ^2 entweder $= 0$ oder $= 1$ sein muss; denn wäre $\gamma^2 \geqq 4$, so wäre $aa' \geqq 4\Delta$, was mit der Bedingung $aa' \leqq \frac{4}{3}\Delta$ streitet. Wir unterscheiden nun diese beiden Fälle:

I. $\gamma = 0$.

Dann lauten die drei obigen Gleichungen folgendermaassen:

$$\alpha\delta = 1;\ a' = a\alpha^2;\ b' = a\alpha\beta + b;$$

aus der ersten folgt $\alpha = \delta = \pm 1$; also ist $a' = a$, und die dritte Gleichung lehrt, dass $b' - b = \pm a\beta$ durch $a = a'$ theilbar ist; da nun aber $(b) \leqq \frac{1}{2}a$ und $(b') \leqq \frac{1}{2}a'$, also auch $(b') \leqq \frac{1}{2}a$ ist, so sind nur zwei Fälle möglich: entweder ist $b' - b = 0$, also $b' = b$ und folglich, da schon $a' = a$ ist, auch $c' = c$, d. h. die Formen sind identisch, in welchem Fall sich die Aequivalenz von selbst versteht; oder es ist der absolute Werth von $b' - b$, da er unmöglich grösser als a sein kann und doch durch a theilbar sein muss, gleich a; in diesem Fall muss eine der beiden Zahlen b, b' gleich $+\frac{1}{2}a$, die andere gleich $-\frac{1}{2}a$, und also $c' = c$ sein; wir werden daher auf zwei nicht identische ambige Formen $(a, \frac{1}{2}a, c)$ und $(a, -\frac{1}{2}a, c)$ geführt. Diese sind aber in der That äquivalent, und die erstere geht in die letztere durch die Substitution $\binom{1,\ -1}{0,\ +1}$ über.

II. $\gamma = \pm 1$.

In diesem Fall lautet die Gleichung (2) folgendermaassen

$$a' = a\alpha^2 \pm 2b\alpha + c;$$

da wir angenommen haben, dass a' nicht grösser als a, und folglich auch nicht grösser als c ist, so folgt, dass

$$a\alpha^2 \pm 2b\alpha \leqq 0$$

ist. Da nun andererseits $2(b) \leqq a$ und stets $(\alpha) \leqq \alpha^2$, also auch der absolute Werth von $2b\alpha$ nicht grösser ist als $a\alpha^2$, so ist ganz gewiss

$$a\alpha^2 \pm 2b\alpha \geqq 0.$$