

## Werk

**Titel:** Vorlesungen über Zahlentheorie

**Autor:** Dirichlet, Peter

**Verlag:** Vieweg

**Ort:** Braunschweig

**Jahr:** 1871

**Kollektion:** Mathematica

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN30976923X

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X>

**LOG Id:** LOG\_0073

**LOG Titel:** S. 65. Ausnahmefälle, in welchen zwei nicht identische reducirte Formen äquivalent sind.

**LOG Typ:** chapter

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

$$\begin{pmatrix} 0, & +1 \\ -1, & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, & +1 \\ -1, & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1, & -1 \\ +2, & +1 \end{pmatrix}$$

in die Form (4, 2, 51), dagegen durch die Substitution

$$\begin{pmatrix} 0, & +1 \\ -1, & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1, & +0 \\ +2, & -1 \end{pmatrix}$$

in die Form (4, -2, 51) über. Man sieht aus diesem Beispiele wie einfach der angegebene Algorithmus sich gestaltet.

### §. 65.

Wir sehen ferner an dem eben behandelten Beispiele, dass eine und dieselbe Form zwei verschiedenen reducirten Formen äquivalent sein kann, woraus folgt, dass auch zwei verschiedene reducirte Formen unter einander äquivalent sein, also derselben Classe angehören können. Da es von grosser Wichtigkeit ist, dies allgemein zu untersuchen, so stellen wir uns die Frage:

*Wann sind zwei reducirte Formen  $(a, b, c)$  und  $(a', b', c')$  von gleicher negativer Determinante  $D = -\Delta$  einander äquivalent?*

Zunächst ziehen wir einige Folgerungen aus den beiden Bedingungen

$$2(b) \leq a, \quad a \leq c,$$

welche ausdrücken, dass die Form  $(a, b, c)$  eine reducirte ist. Es ergibt sich nämlich aus der erstern  $4b^2 \leq a^2$ , aus der letztern  $a^2 \leq ac$ , also auch  $4b^2 \leq ac$  oder  $3b^2 \leq ac - b^2$ , folglich

$$(b) \leq \sqrt{\frac{1}{3}\Delta}.$$

Hieraus folgt weiter, dass  $3ac = 3\Delta + 3b^2 \leq 4\Delta$  und, da  $a^2 \leq ac$  ist, dass

$$a \leq \sqrt{\frac{4}{3}\Delta}$$

ist.

Nehmen wir jetzt an, die beiden reducirten Formen  $(a, b, c)$ ,  $(a', b', c')$  seien äquivalent, so dürfen wir, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, voraussetzen, dass

$$a' \leq a$$

ist. Es sei nun  $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$  die Substitution, durch welche  $(a, b, c)$  in  $(a', b', c')$  übergeht, also

$$1 = \alpha\delta - \beta\gamma \tag{1}$$

$$a' = a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2 \tag{2}$$

$$b' = a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta. \tag{3}$$

Multipliciren wir die Gleichung (2) mit  $a$ , so ergibt sich

$$aa' = (a\alpha' + b\gamma)^2 + \Delta\gamma^2; \quad aa' < \frac{4D}{3} \quad ?$$

da nun sowohl  $a$ , als auch  $a' \leq \sqrt{\frac{4}{3}\Delta}$ , und also

$$aa' \leq \frac{4}{3}\Delta$$

ist, so folgt, dass in der vorstehenden Gleichung  $\gamma^2$  entweder  $= 0$  oder  $= 1$  sein muss; denn wäre  $\gamma^2 \geq 4$ , so wäre  $aa' \geq 4\Delta$ , was mit der Bedingung  $aa' \leq \frac{4}{3}\Delta$  streitet. Wir unterscheiden nun diese beiden Fälle:

I.  $\gamma = 0$ .

Dann lauten die drei obigen Gleichungen folgendermaassen:

$$\alpha\delta = 1; \quad a' = a\alpha^2; \quad b' = a\alpha\beta + b;$$

aus der ersten folgt  $\alpha = \delta = \pm 1$ ; also ist  $a' = a$ , und die dritte Gleichung lehrt, dass  $b' - b = \pm a\beta$  durch  $a = a'$  theilbar ist; da nun aber  $(b) \leq \frac{1}{2}a$  und  $(b') \leq \frac{1}{2}a'$ , also auch  $(b') \leq \frac{1}{2}a$  ist, so sind nur zwei Fälle möglich: entweder ist  $b' - b = 0$ , also  $b' = b$  und folglich, da schon  $a' = a$  ist, auch  $c' = c$ , d. h. die Formen sind identisch, in welchem Fall sich die Aequivalenz von selbst versteht; oder es ist der absolute Werth von  $b' - b$ , da er unmöglich grösser als  $a$  sein kann und doch durch  $a$  theilbar sein muss, gleich  $a$ ; in diesem Fall muss eine der beiden Zahlen  $b, b'$  gleich  $+\frac{1}{2}a$ , die andere gleich  $-\frac{1}{2}a$ , und also  $c' = c$  sein; wir werden daher auf zwei nicht identische ambige Formen  $(a, \frac{1}{2}a, c)$  und  $(a, -\frac{1}{2}a, c)$  geführt. Diese sind aber in der That äquivalent, und die erstere geht in die letztere durch die Substitution  $\begin{pmatrix} 1 & \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  über.

II.  $\gamma = \pm 1$ .

In diesem Fall lautet die Gleichung (2) folgendermaassen

$$a' = a\alpha^2 \pm 2b\alpha + c;$$

da wir angenommen haben, dass  $a'$  nicht grösser als  $a$ , und folglich auch nicht grösser als  $c$  ist, so folgt, dass

$$a\alpha^2 \pm 2b\alpha \leq 0$$

ist. Da nun andererseits  $2(b) \leq a$  und stets  $(\alpha) \leq \alpha^2$ , also auch der absolute Werth von  $2b\alpha$  nicht grösser ist als  $a\alpha^2$ , so ist ganz gewiss

$$a\alpha^2 \pm 2b\alpha \geq 0.$$