Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie
Autor: Dirichlet, Peter
Verlag: Vieweg
Ort: Braunschweig
Jahr: 1871
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN30976923X
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X

LOG Id: LOG_0074
LOG Titel: §. 66. Die Aequivalenz oder Nichtäquivalenz zweier Formen von gleicher negativer Determinante wird durch Vergleichung mit reducirten Formen erkannt
LOG Typ: chapter

Es kann also $a\alpha^2 \pm 2b\alpha$ weder positiv noch negativ sein, und folglich ist

$$a\alpha^2 \pm 2b\alpha = 0,$$

also $a' = c$; da aber $a' \leqq a$ und $a \leqq c$, so folgt weiter, dass sowohl $a' = a$, als auch $c = a$ ist. Nun kann man die Gleichung (3) mit Hülfe der Gleichung (1) in die Form

$$b + b' = a\alpha\beta + 2b\alpha\delta \pm c\delta$$

bringen, und da $c = a$, und $2b\alpha = \mp a\alpha^2$ ist, so ergiebt sich

$$b + b' = a(\alpha\beta \mp \alpha^2\delta \pm \delta)$$

d. h. $b + b'$ ist theilbar durch a. Hieraus folgt ganz ähnlich wie im Fall I, dass $b + b'$ entweder $= 0$, oder dass der absolute Werth von $b + b'$ gleich a sein muss. Im letztern Fall müssten b und b' einander gleich, nämlich $= \pm \frac{1}{2}a$ sein, dann erhielte man also wieder den Fall zweier identischen Formen, der kein Interesse darbietet. Im erstern Fall dagegen ist $b' = -b$, folglich da $a' = a$, und auch $c = a$ ist, auch $c' = c = a$; wir haben daher folgende zwei Formen (a, b, a) und $(a, -b, a)$, welche (wenn b von Null verschieden ist) nicht identisch sind; diese sind wirklich äquivalent, und die erstere geht in die letztere durch die Substitution $\binom{0,\ -1}{1,\ \ \ 0}$ über.

Wir fassen das Resultat der Untersuchung in Folgendem zusammen:

Die beiden einzigen Fälle, in denen zwei nicht identische reducirte Formen derselben Classe angehören, sind die folgenden: die Formen $(a, \frac{1}{2}a, c)$ *und* (a, b, a) *gehen resp. durch die Substitutionen*

$$\begin{pmatrix}1, & -1\\ 0, & +1\end{pmatrix} \textit{ und } \begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix}$$

in die entgegengesetzten Formen $(a, -\frac{1}{2}a, c)$ *und* $(a, -b, a)$ *über.*

§. 66.

Hiermit ist nun auch die Aufgabe gelöst, zu entscheiden, ob zwei Formen von gleicher negativer Determinante äquivalent sind oder nicht. Sind φ und ψ die beiden Formen, so transformire man jede derselben, falls sie noch nicht reducirt sein sollte, nach der oben (§. 64) angegebenen Methode in eine reducirte Form, φ in φ', ψ in ψ'. Stellt sich dann heraus, dass φ' und ψ' identisch ausfallen, oder dass sie einen der beiden eben untersuchten Fälle darbieten, in welchen zwei nicht identische reducirte Formen dennoch äquivalent sind (was durch den Anblick der beiden Formen augenblicklich erkannt wird), so sind die gegebenen Formen φ und ψ gewiss äquivalent. Und zugleich ergiebt sich eine Substitution, durch welche die eine Form in die andere übergeht; denn durch den Process der Reduction ergeben sich Substitutionen S, durch welche φ in φ', und T, durch welche ψ in ψ' übergeht. Sind daher φ' und ψ' identisch, so geht, wenn T' die inverse Substitution von T bedeutet, die Form φ durch die zusammengesetzte Substitution ST' in die Form ψ über. Sind dagegen φ' und ψ' nicht identisch, aber doch äquivalent, so ist, wie wir oben gesehen haben, immer eine Substitution U bekannt, durch welche φ' in ψ' übergeht; und dann geht φ durch die zusammengesetzte Substitution SUT' in ψ über.

Zeigt sich aber, dass die Formen φ' und ψ' nicht identisch sind, und dass sie auch keinen der beiden im vorigen Paragraphen erwähnten singulären Fälle darbieten, sind also diese beiden reducirten Formen nicht äquivalent, so sind auch die beiden gegebenen Formen φ und ψ nicht äquivalent, wie unmittelbar aus §. 59 folgt.

Hiermit sind für negative Determinanten die beiden in §. 59 aufgestellten Probleme der Lehre von der Aequivalenz vollständig gelöst: soeben das erstere, welches darin besteht, über die Aequivalenz oder Nichtäquivalenz zweier gegebenen Formen zu entscheiden; und zugleich haben wir jedesmal, wenn die Entscheidung für die erstere lautet, auch eine Substitution zu finden gelehrt, durch welche die eine Form in die andere übergeht. Das zweite Problem, aus einer gegebenen Substitution, durch welche eine gegebene Form in eine (hierdurch schon völlig bestimmte) äquivalente Form übergeht, alle Substitutionen zu finden, durch welche die erstere Form in dieselbe zweite Form übergeht, ist in den §§. 61, 62 ebenfalls vollständig gelöst.