Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie
Autor: Dirichlet, Peter
Verlag: Vieweg
Ort: Braunschweig
Jahr: 1871
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN30976923X
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X

LOG Id: LOG_0080
LOG Titel: §. 72. Positive Determinanten. Erste und zweite Wurzel einer Form
LOG Typ: chapter

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

§. 72.

Wir wenden uns nun zu den Formen mit *positiver* Determinante D, um auch für sie die Hauptprobleme der Theorie der Aequivalenz zu lösen. Das zweite Problem (§. 59), aus *einer* Transformation einer Form in eine zweite *alle* Transformationen der erstern in die letztere zu finden, ist durch unsere frühere Untersuchung (§. 62) auf die Aufgabe zurückgeführt, alle ganzzahligen Auflösungen der Gleichung

$$t^2 - Du^2 = \sigma^2$$

zu finden. Dieselbe ist für positive Determinanten bei weitem schwieriger zu lösen, als für negative. Dasselbe gilt von dem ersten Hauptproblem: zu erkennen, ob zwei Formen von gleicher Determinante äquivalent sind oder nicht. Wir schlagen zur Lösung desselben einen ganz andern Weg ein, wie früher bei negativen Determinanten, einen Weg, der aber zugleich die Mittel an die Hand geben wird, auch die obige Gleichung vollständig aufzulösen.*)

Das Charakteristische dieser Methode besteht darin, dass wir auch *irrationale* Grössen in den Kreis unserer Betrachtungen ziehen. Ist nämlich (a, b, c) oder

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

eine Form, deren Determinante $b^2 - ac = D$ positiv ist, so hat die entsprechende quadratische Gleichung

$$a + 2b\omega + c\omega^2 = 0$$

zwei reelle Wurzeln

$$\omega = \frac{-b \mp \sqrt{D}}{c} = \frac{a}{-b \pm \sqrt{D}},$$

die wir, je nachdem das obere oder untere Zeichen genommen wird, als die *erste* oder *zweite Wurzel der Form* (a, b, c) bezeichnen und von einander unterscheiden wollen, indem wir ein für alle Mal festsetzen, dass das Zeichen $\sqrt{D}$ stets die *positive* Quadratwurzel aus der Determinante bedeuten soll. Durch die Coefficienten der Form (a, b, c) ist also jede ihrer beiden Wurzeln vollständig, ohne Zweideutigkeit bestimmt. Aber umgekehrt ist auch jede Form (a, b, c) der Determinante D durch Angabe *einer* ihrer

*) *Lejeune Dirichlet: Vereinfachung der Theorie der binären quadratischen Formen von positiver Determinante* (Berliner Akad. 1854).