Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie
Autor: Dirichlet, Peter
Verlag: Vieweg
Ort: Braunschweig
Jahr: 1871
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN30976923X
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X

LOG Id: LOG_0081
LOG Titel: §. 73. Beziehungen zwischen den gleichnamigen oder ungleichnamigen Wurzeln zweier eigentlich oder uneigentlich äquivalenten Formen. Benachbarte Formen.
LOG Typ: chapter

Wurzeln vollständig charakterisirt, in der Weise, dass zwei Formen (a, b, c) und (a', b', c') *derselben* Determinante D nothwendig identisch sind, sobald sie gleiche erste, oder gleiche zweite Wurzeln haben; denn aus der Gleichung

$$\frac{-b' \mp \sqrt{D}}{c'} = \frac{-b \mp \sqrt{D}}{c},$$

worin entweder die beiden oberen, oder die beiden unteren Zeichen zu nehmen sind, ergiebt sich in Folge der Irrationalität von $\sqrt{D}$ zunächst $c' = c$, und dann $b' = b$, also auch $a' = a$.

Im Folgenden nennen wir zwei Wurzeln ω, ω' zweier Formen resp. (a, b, c), (a', b', c') *gleichnamig*, wenn beide erste, oder beide zweite Wurzeln sind, *ungleichnamig* dagegen, wenn die eine die erste, die andere die zweite Wurzel ist. Wir können dann das eben erhaltene Resultat auch so aussprechen: *Wenn zwei Formen dieselbe (positive) Determinante besitzen, und wenn eine Wurzel der einen Form mit der gleichnamigen Wurzel der andern Form übereinstimmt, so sind beide Formen identisch.*

§. 73.

Wir wollen nun annehmen, es seien (a, b, c) und (a', b', c') zwei äquivalente Formen, und zwar wollen wir für einen Augenblick die uneigentliche Aequivalenz nicht ausschliessen, weil dadurch der Nerv der Betrachtung deutlicher hervortritt. Es sei $\binom{\alpha,\ \beta}{\gamma,\ \delta}$ eine Substitution, durch welche (a, b, c) in (a', b', c') übergeht, also

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \varepsilon = \pm 1.$$

Da durch diese Substitution

$$x = \alpha x' + \beta y',\ y = \gamma x' + \delta y'$$

identisch

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2$$

wird, so leuchtet ein, dass vermöge der Formeln

$$\omega = \frac{\gamma + \delta\omega'}{\alpha + \beta\omega'},\quad \omega' = \frac{-\gamma + \alpha\omega}{\delta - \beta\omega}$$

aus einer Wurzel ω' der Form (a', b', c') eine Wurzel ω der Form (a, b, c) gefunden werden kann, und umgekehrt; denn die Wurzeln dieser Formen sind ja die Werthe der Verhältnisse $y:x$ und $y':x'$, für welche die Formen verschwinden. Aber es fragt sich vor allen Dingen, ob zwei so verbundene Wurzeln ω und ω' gleichnamig sind, oder nicht. Da nun

$$\omega = \frac{-b \mp \sqrt{D}}{c}$$

ist, so folgt ω':

$$\omega' = \frac{\gamma c - \alpha(-b \mp \sqrt{D})}{-\delta c + \beta(-b \mp \sqrt{D})} = \frac{b\alpha + c\gamma \pm \alpha\sqrt{D}}{-b\beta - c\delta \mp \beta\sqrt{D}};$$

machen wir den Nenner rational, indem wir den Bruch durch $-b\beta - c\delta \pm \beta\sqrt{D}$ erweitern und berücksichtigen, dass

$$a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta = b'$$
$$a\beta^2 + 2b\beta\delta + c\delta^2 = c'$$

ist, so ergiebt sich

$$\omega' = \frac{-b' \mp \varepsilon\sqrt{D}}{c'}.$$

Wir haben daher folgendes Resultat erhalten: *Wenn eine Form* (a, b, c) *durch eine Substitution* $\binom{\alpha,\ \beta}{\gamma,\ \delta}$ *in eine äquivalente Form* (a', b', c') *übergeht, so ist je eine Wurzel* ω *der erstern mit je einer Wurzel* ω' *der letztern Form durch die Relation*

$$\omega = \frac{\gamma + \delta\omega'}{\alpha + \beta\omega'}, \quad \omega' = \frac{-\gamma + \alpha\omega}{\delta - \beta\omega}$$

verbunden; und zwar bilden ω, ω' *ein Paar gleichnamiger oder ungleichnamiger Wurzeln der beiden Formen, je nachdem die Substitution eine eigentliche oder uneigentliche ist.*

Wir schliessen von jetzt an uneigentliche Aequivalenz und uneigentliche Substitutionen gänzlich aus; es sind dann also stets zwei *gleichnamige* Wurzeln der beiden äquivalenten Formen in der angegebenen Weise mit einander verbunden. Dieser Satz lässt sich in folgender Weise umkehren:

Wenn zwei Formen (a, b, c), (a', b', c') *dieselbe Determinante haben, und wenn zwei gleichnamige Wurzeln* ω *und* ω' *derselben durch die Gleichung*

$$\omega = \frac{\gamma + \delta\omega'}{\alpha + \beta\omega'}$$

verbunden sind, in welcher die vier ganzen Zahlen α, β, γ, δ *der Gleichung*