Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie
Autor: Dirichlet, Peter
Verlag: Vieweg
Ort: Braunschweig
Jahr: 1871
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN30976923X
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X

LOG Id: LOG_0082
LOG Titel: §. 74. Reducirte Formen von positiver Determinante; Eigenschaften ihrer Wurzeln.
LOG Typ: chapter

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

genügen, so sind die beiden Formen äquivalent, und zwar geht die erstere durch die Substitution $\binom{\alpha,\ \beta}{\gamma,\ \delta}$ *in die letztere über.*

Denn durch diese Substitution geht (a, b, c) in eine äquivalente Form (a'', b'', c'') über, und bezeichnet man mit ω'' ihre mit ω gleichnamige Wurzel, so ist nach dem eben bewiesenen Satze

$$\omega = \frac{\gamma + \delta\,\omega''}{\alpha + \beta\,\omega''}, \text{ und folglich } \omega' = \omega'';$$

da ferner der Voraussetzung nach ω' mit ω, folglich auch mit ω'' gleichnamig ist, und da endlich (a', b', c') dieselbe Determinante wie (a, b, c), und folglich auch wie (a'', b'', c'') hat, so ist zufolge der Schlussbemerkung des vorigen Paragraphen (a', b', c') identisch mit (a'', b'', c''), d. h. (a, b, c) geht durch die obige Substitution in (a', b', c') über.

Von besonderer Wichtigkeit für das Folgende ist die Betrachtung zweier *benachbarten* Formen (a, b, a') und (a', b', a''), in welchen der Definition zufolge (§. 63) die Summe $b + b'$ durch a' theilbar, also $b + b' = - a'\delta$ ist, und von welchen die erstere in die letztere durch die Substitution $\binom{0,\ 1}{-1,\ \delta}$ übergeht. Die gleichnamigen Wurzeln ω und ω' dieser beiden Formen hängen durch die Gleichungen

$$\omega = \delta - \frac{1}{\omega'},\ \omega' = \frac{1}{\delta - \omega}$$

zusammen.

§. 74.

Auch bei positiven Determinanten vergleicht man zwei Formen, deren Aequivalenz beurtheilt werden soll, nicht unmittelbar mit einander, sondern man transformirt jede von ihnen in eine sogenannte *reducirte**) Form; der Begriff einer solchen ist aber hier wesentlich verschieden von demjenigen, welcher früher (§. 64) für negative Determinanten aufgestellt ist.

Eine Form (a, b, c) von positiver Determinante D heisst eine reducirte Form, wenn, abgesehen vom Zeichen, ihre erste Wurzel

---

*) *Gauss: D. A.* art. 1 3.

$$\frac{-b - \sqrt{D}}{c} > 1,$$

ihre zweite Wurzel

$$\frac{-b + \sqrt{D}}{c} < 1$$

ist, und wenn ausserdem beide Wurzeln entgegengesetzte Zeichen haben.

Ziehen wir zunächst einige Folgerungen aus dieser Erklärung. Da die erste Wurzel numerisch grösser als die zweite, also auch die Summe der beiden Grössen b und $\sqrt{D}$ numerisch grösser als ihre Differenz sein soll, so muss, da $\sqrt{D}$ positiv ist, auch b positiv sein (nicht $= 0$); da ferner die beiden Wurzeln entgegengesetzte Zeichen haben, so gilt dasselbe auch von den beiden Grössen

$$-(b + \sqrt{D}) \quad \text{und} \quad -b + \sqrt{D};$$

und da die erstere gewiss negativ ist, so muss die letztere positiv sein; es ist daher

$$0 < b < \sqrt{D}.$$

Bezeichnen wir ferner mit (c) wieder den absoluten Werth des Coefficienten c, so muss also im algebraischen Sinne (d. h. mit Rücksicht auf die Vorzeichen)

$$\frac{b + \sqrt{D}}{(c)} > 1 \quad \text{und} \quad 0 < \frac{-b + \sqrt{D}}{(c)} < 1,$$

d. h. es muss

$$0 < \sqrt{D} - b < (c) < \sqrt{D} + b$$

sein; und umgekehrt leuchtet ein, dass jede Form (a, b, c), deren Coefficienten diesen letzteren Ungleichungen genügen, sicher eine reducirte Form ist, weil aus ihnen rückwärts die ursprünglichen Bedingungen sich ableiten lassen.

Aus der Definition ergeben sich noch weitere Folgerungen. Da $D = b^2 - ac$ und $b^2 < D$ ist, so müssen a und c entgegengesetzte Zeichen haben; da ferner die erste Wurzel und c ebenfalls entgegengesetzte Zeichen haben, so hat die erste Wurzel dasselbe Vorzeichen wie der erste Coefficient a der Form. Nun hat ferner die zweite Wurzel das entgegengesetzte Zeichen der ersten Wurzel, also dasselbe Vorzeichen wie der dritte Coefficient c der Form, was sich unmittelbar auch daraus ergiebt, dass $\sqrt{D} - b$ positiv ist.

Für den absoluten Werth des ersten Coefficienten a gelten dieselben Bedingungen, wie für den von c; denn da

$$D = b^2 + (a)(c),$$

also

$$(a) = \frac{(\sqrt{D} + b)(\sqrt{D} - b)}{(c)}$$

ist, so ergiebt sich aus den Bedingungen

$$\frac{\sqrt{D} + b}{(c)} > 1, \quad 0 < \frac{\sqrt{D} - b}{(c)} < 1,$$

dass

$$(a) > \sqrt{D} - b, \quad \text{und} \quad (a) < \sqrt{D} + b$$

ist*).

Für das Folgende ist noch der specielle Fall bemerkenswerth, in welchem

$$\sqrt{D} - (a) < b < \sqrt{D} \text{ und } (c) \geqq (a)$$

ist; aus diesen Bedingungen kann man nämlich stets schliessen, dass die Form (a, b, c) reducirt ist, obwohl die Umkehrung nicht gestattet ist. In der That, giebt man diesen Bedingungen die Form

$$0 < \sqrt{D} - b < (a) \lesseqgtr (c),$$

so ergiebt sich zunächst, dass die zweite Wurzel

$$\frac{-b + \sqrt{D}}{c}$$

numerisch < 1, ferner dass die erste Wurzel

$$\frac{-b - \sqrt{D}}{c} = \frac{a}{\sqrt{D} - b}$$

numerisch > 1 ist. Hieraus folgt weiter, wie oben, dass b positiv ist, weil $\sqrt{D} + b$ numerisch grösser als $\sqrt{D} - b$ ist; und folglich haben, da ausserdem $b < \sqrt{D}$ ist, beide Wurzeln entgegengesetzte Zeichen. Also ist die Form gewiss eine reducirte.

---

*) Dasselbe ergiebt sich unmittelbar daraus, dass die erste Wurzel einer Form (a, b, c) der reciproke Werth der zweiten Wurzel ihres *Gefährten* (c, b, a) ist; mithin sind entweder beide Formen reducirt, oder beide nicht reducirt.