Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie
Autor: Dirichlet, Peter
Verlag: Vieweg
Ort: Braunschweig
Jahr: 1871
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN30976923X
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X

LOG Id: LOG_0087
LOG Titel: §. 79. Entwicklung der Wurzeln der reducirten Formen von positiver Determinante in periodische Kettenbrüche.
LOG Typ: chapter

Beispiel 3: Für $D = 35$ erhält man folgende vier Perioden, jede von zwei Gliedern:

$$\begin{array}{ll} \varphi_0 = (1, 5, -10), & \varphi_1 = (-10, 5, 1) \\ \psi_0 = (10, 5, -1), & \psi_1 = (-1, 5, 10) \\ \chi_0 = (2, 5, -5), & \chi_1 = (-5, 5, 2) \\ \theta_0 = (5, 5, -2), & \theta_1 = (-2, 5, 5). \end{array}$$

Beispiel 4: Die 32 reducirten Formen der Determinante $D = 79$ zerfallen in vier Perioden von je sechs Gliedern und zwei Perioden von je vier Gliedern; eine der sechsgliedrigen Perioden ist folgende:

$$\begin{array}{ll} \varphi_0 = (7, 3, -10); & \varphi_1 = (-10, 7, 3) \\ \varphi_2 = (3, 8, -5); & \varphi_3 = (-5, 7, 6) \\ \varphi_4 = (6, 5, -9); & \varphi_5 = (-9, 4, 7); \end{array}$$

aus ihr entstehen die drei anderen durch Vertauschung der äusseren Coefficienten (womit die Vertauschung von rechts nach links in der Folge der Glieder verbunden ist), ferner durch Verwandlung der Vorzeichen der äusseren Coefficienten in die entgegengesetzten. Eine der beiden viergliedrigen Perioden ist

$$\begin{array}{ll} \psi_0 = (1, 8, -15); & \psi_1 = (-15, 7, 2) \\ \psi_2 = (2, 7, -15); & \psi_3 = (-15, 8, 1); \end{array}$$

aus ihr entsteht die andere durch die Zeichenänderung der äusseren Coefficienten.

§. 79.

Die vorhergehenden Untersuchungen über die Perioden der reducirten Formen von positiver Determinante stehen in der engsten Beziehung zu der Entwicklung der Wurzeln dieser Formen in Kettenbrüche. Nehmen wir für die Anfangsform φ_0 einer Periode immer eine solche, deren erster Coefficient *positiv* ist, so ist auch ihre *erste* Wurzel ω_0 positiv. Wir bezeichnen mit ω_μ die *erste* Wurzel der Form φ_μ, mit δ_μ den vierten Coefficienten der Substitution

$$\begin{pmatrix} 0, & +1 \\ -1, & \delta_\mu \end{pmatrix},$$

durch welche φ_μ in die nach rechts benachbarte Form $\varphi_{\mu+1}$ übergeht, und endlich mit k_μ den absoluten Werth von δ_μ. Da (nach §. 77) der Coefficient δ_μ seinem Zeichen nach mit ω_μ übereinstimmt, und dem absoluten Werth nach die grösste in dem absoluten Werth von ω_μ enthaltene ganze Zahl ist, und da die Wurzeln $\omega_0, \omega_1, \omega_2 \dots$ abwechselnd positiv und negativ sind, so ist $(-1)^\mu \omega_\mu$ stets positiv, und folglich

$$k_\mu = (-1)^\mu \delta_\mu;$$

zwischen den successiven Wurzeln $\omega_\mu, \omega_{\mu+1} \dots$ bestehen aber folgende Relationen (§. 77):

$$\omega_\mu = \delta_\mu - \frac{1}{\omega_{\mu+1}}; \quad \omega_{\mu+1} = \delta_{\mu+1} - \frac{1}{\omega_{\mu+2}} \cdots$$

multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit ± 1, ∓ 1 u. s. w. der Art, dass die linke Seite stets positiv wird, so erhält man

$$\pm \omega_\mu = k_\mu + \frac{1}{\mp \omega_{\mu+1}}; \quad \mp \omega_{\mu+1} = k_{\mu+1} + \frac{1}{\pm \omega_{\mu+2}} \cdots$$

und hieraus ergiebt sich für den positiven irrationalen unechten Bruch $(-1)^\mu \omega_\mu$ der folgende unendliche Kettenbruch (§. 23):

$$(-1)^\mu \omega_\mu = (k_\mu, k_{\mu+1}, k_{\mu+2} \dots).$$

Offenbar ist dieser Kettenbruch periodisch; denn besteht die Periode der reducirten Formen φ aus $2n$ Gliedern, so ist $\delta_{\mu+2n} = \delta_\mu$ und also auch $k_{\mu+2n} = k_\mu$; es wiederholt sich daher die Reihe der Zahlen k immer nach höchstens $2n$ Gliedern von Neuem.

Beispiel 1: Nehmen wir $D = 13$, so haben wir, um die erste Wurzel ω_0 der Form $\varphi_0 = (3, 1, -4)$ in einen Kettenbruch zu entwickeln, ihre Periode aufzustellen (§. 78):

$$\begin{aligned}
\varphi_0 &= (3, 1, -4); & \varphi_1 &= (-4, 3, 1) \\
\varphi_2 &= (1, 3, -4); & \varphi_3 &= (-4, 1, 3) \\
\varphi_4 &= (3, 2, -3); & \varphi_5 &= (-3, 1, 4) \\
\varphi_6 &= (4, 3, -1); & \varphi_7 &= (-1, 3, 4) \\
\varphi_8 &= (4, 1, -3); & \varphi_9 &= (-3, 2, 3);
\end{aligned}$$

die successiven Werthe der Substitutionscoefficienten δ sind folgende:

$$\begin{aligned}
&\delta_0 = +1, \quad \delta_1 = -6, \quad \delta_2 = +1, \quad \delta_3 = -1, \quad \delta_4 = +1, \\
&\delta_5 = -1, \quad \delta_6 = +6, \quad \delta_7 = -1, \quad \delta_8 = +1, \quad \delta_9 = -1;
\end{aligned}$$

daraus ergeben sich die absoluten Werthe

$$k_0 = 1, \quad k_1 = 6, \quad k_2 = 1, \quad k_3 = 1, \quad k_4 = 1,$$
$$k_5 = 1, \quad k_6 = 6, \quad k_7 = 1, \quad k_8 = 1, \quad k_9 = 1.$$

Hier zeigt sich die eigenthümliche Erscheinung, dass die Period des Kettenbruchs nur aus fünf Gliedern besteht, während die Periode der Formen doppelt so viele Glieder enthält; wir werden später (§. 83) darauf zurückkommen. Die gesuchte Kettenbruch-Entwicklung ergiebt sich hieraus als die folgende:

$$\frac{1+\sqrt{13}}{4} = (1, 6, 1, 1, 1; \; 1, 6, 1, 1, 1; \ldots)$$

Ebenso liefern die beiden anderen reducirten Formen derselben Determinante $D = 13$, nämlich

$$\varphi_0 = (2, 3, -2), \quad \varphi_1 = (-2, 3, 2)$$

folgende Werthe

$$\delta_0 = +3, \; \delta_1 = -3,$$

also

$$k_0 = 3, \qquad k_1 = 3$$

und folglich

$$\frac{3+\sqrt{13}}{2} = (3; \; 3; \ldots);$$

auch hier ist die Periode des Kettenbruchs nur halb so gross wie die der reducirten Formen.

Beispiel 2: Für $D = 19$ giebt die sechsgliedrige Formenperiode

$$\varphi_0 = (3, 2, -5); \quad \varphi_1 = (-5, 3, 2)$$
$$\varphi_2 = (2, 3, -5); \quad \varphi_3 = (-5, 2, 3)$$
$$\varphi_4 = (3, 4, -1); \quad \varphi_5 = (-1, 4, 3)$$

die Zahlen

$$\delta_0 = +1, \; \delta_1 = -3, \; \delta_2 = +1, \; \delta_3 = -2, \; \delta_4 = +8, \; \delta_5 = -2;$$
$$k_0 = 1, \quad k_1 = 3, \quad k_2 = 1, \quad k_3 = 2, \quad k_4 = 8, \quad k_5 = 2;$$

also

$$\frac{2+\sqrt{19}}{5} = (1, 3, 1, 2, 8, 2; \ldots)$$

Beispiel 3: Für $D = 79$ giebt die sechsgliedrige Periode

$$\varphi_0 = (7, 3, -10);\quad \varphi_1 = (-10, 7, 3)$$
$$\varphi_2 = (3, 8, -5);\quad \varphi_3 = (-5, 7, 6)$$
$$\varphi_4 = (6, 5, -9);\quad \varphi_5 = (-9, 4, 7)$$

die Zahlen

$$\delta_0 = +1,\ \delta_1 = -5,\ \delta_2 = +3,\ \delta_3 = -2,\ \delta_4 = +1,\ \delta_5 = -1;$$
$$k_0 = 1,\quad k_1 = 5,\quad k_2 = 3,\quad k_3 = 2,\quad k_4 = 1,\quad k_5 = 1;$$

also entsteht die Entwicklung

$$\frac{3 + \sqrt{79}}{10} = (1, 5, 3, 2, 1, 1; \ldots).$$

Ebenso liefert die viergliedrige Periode

$$\varphi_0 = (1, 8, -15);\quad \varphi_1 = (-15, 7, 2)$$
$$\varphi_2 = (2, 7, -15);\quad \varphi_3 = (-15, 8, 1)$$

die Zahlen

$$\delta_0 = +1,\ \delta_1 = -7,\ \delta_2 = +1,\ \delta_3 = -16$$
$$k_0 = 1,\ k_1 = 7,\ k_2 = 1,\ k_3 = 16;$$

also den Kettenbruch

$$\frac{8 + \sqrt{79}}{15} = (1, 7, 1, 16; \ldots).$$

Zu gleicher Zeit findet man natürlich auch die Entwicklung der Wurzeln der drei anderen Formen

$$-\frac{7 + \sqrt{79}}{2} = -(7, 1, 16, 1; \ldots)$$
$$\frac{7 + \sqrt{79}}{15} = (1, 16, 1, 7; \ldots)$$
$$-\frac{8 + \sqrt{79}}{1} = -(16, 1, 7, 1; \ldots)$$

durch einfache Verschiebung der Periode*).

---

*) Die Form $(1, 0, -D)$ ist der reducirten Form $\varphi_0 = (1, \lambda, \lambda^2 - D)$ äquivalent; die letzte Form der entsprechenden Periode ist offenbar $\varphi_{2n-1} = (\lambda^2 - D, \lambda, 1)$, und hieraus folgt eine Entwicklung von der Form

$$\frac{1}{\sqrt{D} - \lambda} = (k_0 \ldots k_{n-2}, k_{n-1}, k_{n-2} \ldots k_0, 2\lambda; \ldots)$$

und

$$\sqrt{D} = (\lambda; k_0 \ldots k_{n-2}, k_{n-1}, k_{n-2} \ldots k_0, 2\lambda; \ldots).$$

Eine ähnliche Entwicklung tritt jedes Mal auf, wenn in der Periode zwei ambige Formen vorkommen (§. 78).