§. 80.

Es bleibt nun noch die schwierigste Frage zu beantworten übrig, nämlich die, ob zwei reducirte Formen derselben Determinante, welche verschiedenen Perioden angehören, äquivalent sein können oder nicht. Dazu müssen wir eine Digression über die Theorie der Kettenbrüche machen, in welcher wir einige weniger bekannte Sätze über dieselben beweisen wollen.

Ein Kettenbruch $(a, b, c, d \ldots)$, dessen sämmtliche Elemente $a, b, c, d \ldots$ positive ganze Zahlen sind (mit Ausnahme des ersten a, für welches auch der Werth Null gestattet ist), soll im Folgenden ein *regelmässiger* heissen; der Werth eines solchen endlichen oder unendlichen Kettenbruchs ist bekanntlich stets positiv, und umgekehrt ist bekannt, dass jeder positive Werth stets und nur auf eine einzige Weise in einen regelmässigen Kettenbruch verwandelt werden kann. Sehr wichtig für unsere Zwecke ist nun die Umwandlung eines *unregelmässigen* unendlichen Kettenbruchs

$$(\alpha, \beta, \gamma \ldots \mu, \nu, p, q, r \ldots u, v \ldots),$$

dessen Elemente ganze Zahlen und zwar von einem bestimmten p ab sämmtlich *positive* ganze Zahlen sind, in einen regelmässigen. Es wird sich zeigen, *dass bei dieser Umwandlung alle Elemente $u, v \ldots$ von einem bestimmten, in endlicher Entfernung liegenden, Element u ab unverändert bleiben, und dass die Differenz zwischen der Anzahl der geänderten und der Anzahl der sie ersetzenden Elemente eine gerade oder ungerade Zahl ist, je nachdem der Werth des ganzen Kettenbruchs positiv oder negativ ist.*

Um dies zu beweisen, nehmen wir an, es sei ν das letzte nicht positive Element des Kettenbruchs, und wir setzen ausserdem zunächst voraus, dass ν nicht das erste Element des ganzen Kettenbruchs ist. Wir suchen nun die Unregelmässigkeit des Kettenbruchs von dieser äussersten Stelle ν zu entfernen und um mindestens eine Stelle weiter nach links zu drängen.

Hierzu brauchen wir offenbar nur den unendlichen Kettenbruch $(\mu, \nu, p, q \ldots)$ zu betrachten, den wir auch in endlicher Form (μ, ν, p') oder (μ, ν, p, q') oder (μ, ν, p, q, r') u. s. w. schreiben können, wenn wir die unendlichen regelmässigen Kettenbrüche

$$(p, q, r, s \ldots), \quad (q, r, s \ldots), \quad (r, s \ldots) \text{ u. s. w.}$$

zur Abkürzung mit p', q', r' u. s. w. bezeichnen. Wir haben nun folgende Fälle zu unterscheiden.

1. Ist $\nu = 0$, so ist

$$(\mu, 0, p') = \mu + p' = \mu + p + \frac{1}{q'}$$

oder also

$$(\mu, 0, p, q') = (\mu + p, q');$$

es ist also die Unregelmässigkeit von der Stelle $\nu = 0$ um mindestens eine Stelle nach links gedrängt, und zugleich ist an Stelle der abgeänderten drei Elemente $\mu, 0, p$ das einzige Element $\mu + p$ getreten.

2. Ist ν negativ $= -n$, und $n > 1$, so erhält man mit Benutzung der Identität

$$(g, -h) = (g - 1, 1, h - 1)$$

folgende successive Umformung:

$$(\mu, -n, p') = \left(\mu, -n + \frac{1}{p'}\right) = \left(\mu - 1, 1, n - 1 - \frac{1}{p'}\right)$$
$$= (\mu - 1, 1, n - 1, -p')$$

und hieraus durch nochmalige Anwendung derselben Identität

$$(\mu, -n, p, q') = (\mu - 1, 1, n - 2, 1, p' - 1)$$
$$= (\mu - 1, 1, n - 2, 1, p - 1, q').$$

An Stelle der drei abgeänderten Elemente μ, $-n$, p sind die fünf Elemente $\mu - 1$, 1, $n - 2$, 1, $p - 1$ getreten, und von diesen ist höchstens das erste negativ. Sollte ferner $n - 2$ oder $p - 1$, oder sollten beide Zahlen $= 0$ sein, so wird man durch einmalige oder zweimalige Anwendung der unter 1. aufgestellten Regel alle Elemente, mit Ausnahme des ersten, in positive verwandeln; auch dann wird der Unterschied zwischen der Anzahl der abgeänderten und der Anzahl der dieselben ersetzenden Elemente eine gerade Zahl bleiben, und die Unregelmässigkeit ist mindestens um eine Stelle nach links verschoben.

3. Ist $\nu = -1$, so ist die eben angegebene Regel nicht anwendbar; wenn gleichzeitig $p > 1$, so findet man

$$(\mu, -1, p, q') = (\mu - 2, 1, p - 2, q');$$

sollte $p = 2$ sein, so hat man wieder nach der unter 1. aufgestellten Regel zu verfahren. Ist aber $p = 1$, so hilft diese Formel Nichts; dann ist aber

$$(\mu, -1, 1, q') = \mu - 1 - q'$$

und folglich

$$(\mu, -1, 1, q, r, s') = (\mu - 2 - q, 1, r - 1, s');$$

und sollte $r = 1$ sein, so würde man wie in 1. verfahren.

Auf diese Weise ist in allen Fällen ohne Ausnahme die Unregelmässigkeit des Kettenbruchs von der Stelle ν um mindestens eine Stelle weiter nach links gedrängt, und zugleich ist der Unterschied zwischen der Anzahl der abgeänderten und der Anzahl der sie ersetzenden Elemente jedes Mal eine *gerade* Zahl. Durch successive Anwendung desselben Verfahrens wird man daher den ursprünglich gegebenen Kettenbruch

$$(\alpha, \beta, \gamma \ldots \mu, \nu, p, q, r \ldots t, u, v \ldots)$$

in einen andern

$$(\alpha', b, c \ldots k, l, u, v \ldots)$$

umformen können, in welchem alle auf das erste folgenden Elemente $b, c \ldots$ positive ganze Zahlen sind, welche von einer in endlicher Entfernung liegenden Stelle u an mit den Elementen des gegebenen Kettenbruchs übereinstimmen; und zwar wird der Unterschied zwischen der Anzahl der abgeänderten Elemente

$$\alpha, \beta, \gamma \ldots \mu, \nu, p, q, r \ldots t$$

und der Anzahl der sie ersetzenden Elemente

$$\alpha', b, c \ldots k, l$$

eine gerade Zahl sein, weil dasselbe bei jedem einzelnen Act der gesammten Umformung Statt findet.

Ist nun α' positiv oder $= 0$, so ist die Umformung vollendet, und der Werth des Kettenbruchs ist positiv; ist dagegen α' negativ $= -a$, so ist der Kettenbruch negativ, und zwar

$$= -(a - 1, 1, b - 1, c \ldots)$$

oder, wenn $b = 1$ sein sollte,

$$= -(a - 1, c + 1, d \ldots).$$

Bei diesem letzten Act ist die Anzahl der abgeänderten Elemente um eine Einheit kleiner oder grösser als die Anzahl der sie ersetzenden Elemente; und hiermit ist der letzte Punct unserer obigen Behauptung nachgewiesen.