

Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie

Autor: Dirichlet, Peter

Verlag: Vieweg

Ort: Braunschweig

Jahr: 1871

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN30976923X

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X>

LOG Id: LOG_0089

LOG Titel: S. 81. Lemma aus der Theorie der Kettenbrüche

LOG Typ: chapter

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

§. 81.

Wir bedürfen zweitens für die Untersuchung der Aequivalenz zweier Formen noch des folgenden Satzes:

Sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vier ganze Zahlen, welche der Bedingung

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

genügen, und deren erste α von Null verschieden ist; findet ferner zwischen zwei Grössen ω und Ω die Relation

$$\omega = \frac{\gamma + \delta\Omega}{\alpha + \beta\Omega}$$

Statt; so kann man stets

$$\omega = (\gamma', m, n \dots r, \beta', \Omega)$$

setzen, wo die Anzahl der positiven ganzen Zahlen $m, n \dots r$ eine gerade ist, γ' und β' aber auch Null oder negative ganze Zahlen sein können.

Um diesen Satz zu beweisen, können wir, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, annehmen, dass die von Null verschiedene ganze Zahl α positiv ist; denn sollte α negativ sein, so verwandele man die Zeichen aller vier Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in die entgegengesetzten, so bleibt die zwischen ihnen, und ebenso die zwischen ω und Ω bestehende Relation ungeändert. Ist nun zunächst $\alpha = 1$, also $\delta = \beta\gamma + 1$, so ist unmittelbar

$$\omega = \frac{\gamma + (\beta\gamma + 1)\Omega}{1 + \beta\Omega} = \gamma + \frac{\Omega}{1 + \beta\Omega} = (\gamma, \beta, \Omega),$$

also ist in diesem Fall unser Satz richtig. Ist aber $\alpha > 1$, so entwickle man den Bruch $\gamma:\alpha$ in den Kettenbruch $(\gamma', m, n \dots r)$, dessen Elemente sämtlich positive ganze Zahlen sind, mit Ausnahme des ersten γ' , welches positiv, Null oder negativ sein wird, je nachdem γ positiv und grösser als α , oder positiv und kleiner als α , oder endlich negativ ist.

Wir können ferner voraussetzen, dass die Anzahl der positiven Elemente $m, n \dots r$ gerade ist; denn da bei der gewöhnlichen Methode, einen Bruch $\gamma:\alpha$ in einen Kettenbruch zu verwandeln, das letzte Element r mindestens = 2 ist, so könnte man, wenn die Anzahl der Elemente $m, n \dots r$ ungerade sein sollte, das letzte Element r in den Kettenbruch $r - 1 + \frac{1}{1}$ verwandeln und also statt

des obigen Kettenbruchs den folgenden $(\gamma', m, n \dots r-1, 1)$ nehmen, in welchem die Anzahl der positiven Elemente $m, n \dots r-1, 1$ nun gerade ist. Bildet man nun nach der früher (§. 23) angegebenen Methode die sogenannten Näherungsbrüche,

$$\frac{[\gamma']}{1}, \frac{[\gamma', m]}{[m]}, \frac{[\gamma', m, n]}{[m, n]} \dots \frac{[\gamma', m, n \dots q, r]}{[m, n \dots q, r]},$$

so erkennt man leicht, dass ihre Nenner sämtlich positiv sind. Damals haben wir auch bewiesen, dass diese Brüche irreductibel sind, und da der letzte der obigen Brüche dem in Folge der Relation $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ ebenfalls irreductibeln Brüche $\gamma:\alpha$ gleich, und α positiv ist, so muss

$$\alpha = [m, n \dots q, r], \quad \gamma = [\gamma', m, n \dots q, r]$$

sein, weil ein Bruch nur auf eine einzige Weise in die irreductibele Form mit positivem Nenner gebracht werden kann. Da ferner die Anzahl der Elemente $\gamma', m, n \dots q, r$ ungerade ist, so folgt aus der damals aufgestellten Formel [§. 23, (9)], dass

$$[m, n \dots q] [\gamma', m, n \dots q, r] - [m, n \dots q, r] [\gamma', m, n \dots q] = -1$$

oder also

$$\alpha [\gamma', m, n \dots q] - [m, n \dots q] \gamma = 1$$

ist; vergleicht man dies mit der Relation $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, so ergibt sich (ähnlich wie im §. 60), dass man

$$\delta = [\gamma', m, n \dots q] + \gamma\beta'$$

$$\beta = [m, n \dots q] + \alpha\beta'$$

d. h.

$$\delta = [\gamma', m, n \dots q, r, \beta']$$

$$\beta = [m, n \dots q, r, \beta']$$

also

$$\frac{\delta}{\beta} = (\gamma', m, n \dots q, r, \beta')$$

setzen kann, wo β' eine ganze Zahl bedeutet*). Nach demselben Bildungsgesetz ist nun

$$\gamma + \delta\Omega = [\gamma', m, n \dots r, \beta', \Omega] \quad *$$

$$\alpha + \beta\Omega = [m, n \dots r, \beta', \Omega]$$

und folglich, wie zu beweisen war,

$$\omega = (\gamma', m, n \dots r, \beta', \Omega).$$

Da die Brüche $\gamma:\alpha$, $\beta:\alpha$ resp. den Kettenbrüchen $(\gamma', m \dots r)$, $(\beta', r \dots m)$ gleich sind, so sind γ' , β' die grössten in denselben enthaltenen ganzen Zahlen (im Sinne des §. 43).