Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie
Autor: Dirichlet, Peter
Verlag: Vieweg
Ort: Braunschweig
Jahr: 1871
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN30976923X
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X

LOG Id: LOG_0089
LOG Titel: §. 81. Lemma aus der Theorie der Kettenbrüche
LOG Typ: chapter

§. 81.

Wir bedürfen zweitens für die Untersuchung der Aequivalenz zweier Formen noch des folgenden Satzes:

Sind α, β, γ, δ vier ganze Zahlen, welche der Bedingung

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

genügen, und deren erste α von Null verschieden ist; findet ferner zwischen zwei Grössen ω und Ω die Relation

$$\omega = \frac{\gamma + \delta\Omega}{\alpha + \beta\Omega}$$

Statt; so kann man stets

$$\omega = (\gamma', m, n \ldots r, \beta', \Omega)$$

setzen, wo die Anzahl der positiven ganzen Zahlen $m, n \ldots r$ eine gerade ist, γ' und β' aber auch Null oder negative ganze Zahlen sein können.

Um diesen Satz zu beweisen, können wir, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, annehmen, dass die von Null verschiedene ganze Zahl α *positiv* ist; denn sollte α negativ sein, so verwandele man die Zeichen aller vier Zahlen α, β, γ, δ in die entgegengesetzten, so bleibt die zwischen ihnen, und ebenso die zwischen ω und Ω bestehende Relation ungeändert. Ist nun zunächst $\alpha = 1$, also $\delta = \beta\gamma + 1$, so ist unmittelbar

$$\omega = \frac{\gamma + (\beta\gamma + 1)\Omega}{1 + \beta\Omega} = \gamma + \frac{\Omega}{1 + \beta\Omega} = (\gamma, \beta, \Omega),$$

also ist in diesem Fall unser Satz richtig. Ist aber $\alpha > 1$, so entwickle man den Bruch $\gamma:\alpha$ in den Kettenbruch $(\gamma', m, n \ldots r)$, dessen Elemente sämmtlich positive ganze Zahlen sind, mit Ausnahme des ersten γ', welches positiv, Null oder negativ sein wird, je nachdem γ positiv und grösser als α, oder positiv und kleiner als α, oder endlich negativ ist.

Wir können ferner voraussetzen, dass die Anzahl der positiven Elemente $m, n \ldots r$ gerade ist; denn da bei der gewöhnlichen Methode, einen Bruch $\gamma:\alpha$ in einen Kettenbruch zu verwandeln, das letzte Element r mindestens $= 2$ ist, so könnte man, wenn die Anzahl der Elemente $m, n \ldots r$ ungerade sein sollte, das letzte Element r in den Kettenbruch $r - 1 + \frac{1}{1}$ verwandeln und also statt des obigen Kettenbruchs den folgenden $(\gamma', m, n \ldots r-1, 1)$ nehmen, in welchem die Anzahl der positiven Elemente $m, n \ldots r-1, 1$ nun gerade ist. Bildet man nun nach der früher (§. 23) angegebenen Methode die sogenannten Näherungsbrüche,

$$\frac{[\gamma']}{1}, \quad \frac{[\gamma', m]}{[m]}, \quad \frac{[\gamma', m, n]}{[m, n]} \quad \ldots \quad \frac{[\gamma', m, n \ldots q, r]}{[m, n \ldots q, r]},$$

so erkennt man leicht, dass ihre Nenner sämmtlich positiv sind. Damals haben wir auch bewiesen, dass diese Brüche irreductibel sind, und da der letzte der obigen Brüche dem in Folge der Relation $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ ebenfalls irreductibeln Bruche $\gamma : \alpha$ gleich, und α positiv ist, so muss

$$\alpha = [m, n \ldots q, r], \quad \gamma = [\gamma', m, n \ldots q, r]$$

sein, weil ein Bruch nur auf eine einzige Weise in die irreductibele Form mit positivem Nenner gebracht werden kann. Da ferner die Anzahl der Elemente $\gamma', m, n \ldots q, r$ ungerade ist, so folgt aus der damals aufgestellten Formel [§. 23, (9)], dass

$$[m, n \ldots q]\,[\gamma', m, n \ldots q, r] - [m, n \ldots q, r]\,[\gamma', m, n \ldots q] = -1$$

oder also

$$\alpha\,[\gamma', m, n \ldots q] - [m, n \ldots q]\,\gamma = 1$$

ist; vergleicht man dies mit der Relation $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, so ergiebt sich (ähnlich wie im §. 60), dass man

$$\delta = [\gamma', m, n \ldots q] + \gamma\beta'$$
$$\beta = [m, n \ldots q] + \alpha\beta'$$

d. h.

$$\delta = [\gamma', m, n \ldots q, r, \beta']$$
$$\beta = [m, n \ldots q, r, \beta']$$

also

$$\frac{\delta}{\beta} = (\gamma', m, n \ldots q, r, \beta')$$

setzen kann, wo β' eine ganze Zahl bedeutet*). Nach demselben Bildungsgesetz ist nun

$$\gamma + \delta\Omega = [\gamma', m, n \ldots r, \beta', \Omega]$$
$$\alpha + \beta\Omega = [m, n \ldots r, \beta', \Omega]$$

und folglich, wie zu beweisen war,

$$\omega = (\gamma', m, n \ldots r, \beta', \Omega).$$

---

*) Da die Brüche $\gamma : \alpha$, $\beta : \alpha$ resp. den Kettenbrüchen $(\gamma', m \ldots r)$, $(\beta', r \ldots m)$ gleich sind, so sind γ', β' die grössten in denselben enthaltenen ganzen Zahlen (im Sinne des §. 43).