

## Werk

**Titel:** Vorlesungen über Zahlentheorie

**Autor:** Dirichlet, Peter

**Verlag:** Vieweg

**Ort:** Braunschweig

**Jahr:** 1871

**Kollektion:** Mathematica

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN30976923X

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X>

**LOG Id:** LOG\_0090

**LOG Titel:** S. 82. Je zwei äquivalente reducirte Formen von positiver Determinante gehören einer und derselben Periode an.

**LOG Typ:** chapter

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

§. 82.

Nachdem auch dieser zweite Punkt aus der Theorie der Kettenbrüche behandelt ist, schreiten wir zur definitiven Entscheidung der Frage, ob zwei verschiedene Perioden von reducirten Formen einer positiven Determinante äquivalente Formen enthalten können. Es seien daher  $(a, b, c)$  und  $(A, B, C)$  zwei reducirte (eigentlich) äquivalente Formen; da alle Formen einer und derselben Periode einander stets äquivalent sind, so können wir annehmen, dass die ersten Coefficienten  $a, A$ , und folglich auch die ersten Wurzeln dieser beiden Formen *positiv* sind, weil im entgegengesetzten Fall die unmittelbar benachbarten Formen diese Eigenschaft besitzen würden. Bezeichnen wir  $(a, b, c)$  mit  $\varphi_0$  und  $(A, B, C)$  mit  $\Phi_0$ , und bilden wir für jede dieser beiden Formen (nach §. 78) die sie enthaltende Periode, so erhalten wir dadurch für die ersten Wurzeln  $\omega_0, \Omega_0$  dieser beiden Formen die regelmässigen Kettenbrüche

$$\begin{aligned} \omega_0 &= (k_0, k_1, k_2 \dots), \\ \Omega_0 &= (K_0, K_1, K_2 \dots). \end{aligned}$$

Ist nun  $\left(\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\delta}\right)$  eine Substitution, durch welche  $\varphi_0$  in  $\Phi_0$  übergeht, so besteht zwischen den ersten Wurzeln  $\omega_0, \Omega_0$  die Relation

$$\omega_0 = \frac{\gamma + \delta \Omega_0}{\alpha + \beta \Omega_0},$$

und ausserdem ist

$$\alpha \delta - \beta \gamma = 1.$$

Da ferner  $\alpha$  nicht  $= 0$  sein kann, weil sonst  $A = c$ , also  $A$  negativ wäre, so kann man nach dem so eben bewiesenen Satze

$$\omega_0 = (\gamma', m, n \dots r, \beta', \Omega_0)$$

und also auch

$$\omega_0 = (\gamma', m, n \dots r, \beta', K_0, K_1, K_2 \dots)$$

setzen, und in diesem unendlichen Kettenbruch, welcher wenigstens von der Stelle  $K_0$  ab keine Unregelmässigkeit enthält, ist die Anzahl der Elemente  $\gamma', m, n \dots r, \beta'$  eine gerade  $= 2g$ . Ist  $\beta'$  positiv, so ist, da  $\omega_0 > 1$  ist, auch  $\gamma'$  positiv, also der Bruch regelmässig. Ist aber  $\beta' = 0$  oder negativ, so forme man den Kettenbruch nach den obigen Regeln (§. 80) in einen regelmässigen um; nimmt man  $\mu$  hinreichend gross, so werden die Elemente  $K_\mu, K_{\mu+1} \dots$  bei

dieser Umformung ungeändert bleiben, und die Anzahl  $\nu$  der Elemente, welche an die Stelle der vorhergehenden  $(2g + \mu)$  Elemente

$$\gamma', m, n \dots r, \beta', K_0 \dots K_{\mu-1}$$

treten, wird  $\equiv \mu \pmod{2}$  sein (nach §. 80), da der Werth des ganzen Kettenbruchs *positiv* ist. Da nun  $\omega_0$  nur auf eine einzige Weise als ein regelmässiger Kettenbruch dargestellt werden kann, so müssen die Zahlen

$$K_\mu, K_{\mu+1}, K_{\mu+2} \dots$$

resp. mit den Zahlen

$$k_\nu, k_{\nu+1}, k_{\nu+2}, \dots$$

identisch sein. Ist daher  $\mu + h$  ein Multiplum von der Anzahl der Formen, welche die Periode der Form  $\Phi_0$  bilden, und also eine gerade Zahl, so ist auch  $\nu + h$  eine gerade Zahl  $= 2m$ , und die Zahlen

$$K_{\mu+h}, K_{\mu+h+1}, K_{\mu+h+2} \dots$$

stimmen mit den Zahlen

$$K_0, K_1, K_2 \dots,$$

und diese folglich mit den Zahlen

$$k_{2m}, k_{2m+1}, k_{2m+2} \dots$$

überein. Hieraus folgt unmittelbar

$$\Omega_0 = (k_{2m}, k_{2m+1} \dots) = \omega_{2m};$$

und da durch ihre erste Wurzel auch stets die Form vollständig charakterisirt ist (§. 72), so schliessen wir hieraus, dass die Form  $\Phi_0$  mit der Form  $\varphi_{2m}$  identisch sein muss, dass also  $\Phi_0$  sich in der aus  $\varphi_0$  entwickelten Periode befinden muss. Wir haben so folgenden *Hauptsatz*\*) gewonnen:

*Zwei äquivalente reducirte Formen von positiver Determinante gehören einer und derselben Periode an; zwei reducirte Formen können nicht äquivalent sein, wenn sie verschiedenen Perioden angehören.*

Mit Hülfe dieses Satzes ergibt sich nun eine Methode, um zu prüfen, ob zwei gegebene Formen von gleicher positiver Determinante äquivalent sind oder nicht. Man suche (nach §. 76) zu jeder der beiden Formen eine ihr äquivalente reducirte Form; je nachdem die so gefundenen reducirten Formen derselben oder verschiedenen Perioden angehören, sind die gegebenen Formen

\*) Gauss: D. A. art. 193.