Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie
Autor: Dirichlet, Peter
Verlag: Vieweg
Ort: Braunschweig
Jahr: 1871
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN30976923X
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X

LOG Id: LOG_0090
LOG Titel: §. 82. Je zwei äquivalente reducirte Formen von positiver Determinante gehören einer und derselben Periode an.
LOG Typ: chapter

§. 82.

Nachdem auch dieser zweite Punct aus der Theorie der Kettenbrüche behandelt ist, schreiten wir zur definitiven Entscheidung der Frage, ob zwei verschiedene Perioden von reducirten Formen einer positiven Determinante äquivalente Formen enthalten können. Es seien daher (a, b, c) und (A, B, C) zwei reducirte (eigentlich) äquivalente Formen; da alle Formen einer und derselben Periode einander stets äquivalent sind, so können wir annehmen, dass die ersten Coefficienten a, A, und folglich auch die ersten Wurzeln dieser beiden Formen *positiv* sind, weil im entgegengesetzten Fall die unmittelbar benachbarten Formen diese Eigenschaft besitzen würden. Bezeichnen wir (a, b, c) mit φ_0 und (A, B, C) mit Φ_0, und bilden wir für jede dieser beiden Formen (nach §. 78) die sie enthaltende Periode, so erhalten wir dadurch für die ersten Wurzeln ω_0, Ω_0 dieser beiden Formen die regelmässigen Kettenbrüche

$$\omega_0 = (k_0, k_1, k_2 \ldots),$$
$$\Omega_0 = (K_0, K_1, K_2 \ldots).$$

Ist nun $\binom{\alpha, \beta}{\gamma, \delta}$ eine Substitution, durch welche φ_0 in Φ_0 übergeht, so besteht zwischen den ersten Wurzeln ω_0, Ω_0 die Relation

$$\omega_0 = \frac{\gamma + \delta\Omega_0}{\alpha + \beta\Omega_0},$$

und ausserdem ist

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Da ferner α nicht $= 0$ sein kann, weil sonst $A = c$, also A negativ wäre, so kann man nach dem so eben bewiesenen Satze

$$\omega_0 = (\gamma', m, n \ldots r, \beta', \Omega_0)$$

und also auch

$$\omega_0 = (\gamma', m, n \ldots r, \beta', K_0, K_1, K_2 \ldots)$$

setzen, und in diesem unendlichen Kettenbruch, welcher wenigstens von der Stelle K_0 ab keine Unregelmässigkeit enthält, ist die Anzahl der Elemente $\gamma', m, n \ldots r, \beta'$ eine gerade $= 2g$. Ist β' positiv, so ist, da $\omega_0 > 1$ ist, auch γ' positiv, also der Bruch regelmässig. Ist aber $\beta' = 0$ oder negativ, so forme man den Kettenbruch nach den obigen Regeln (§. 80) in einen regelmässigen um; nimmt man μ hinreichend gross, so werden die Elemente $K_\mu, K_{\mu+1} \ldots$ bei dieser Umformung ungeändert bleiben, und die Anzahl ν der Elemente, welche an die Stelle der vorhergehenden $(2g + \mu)$ Elemente

$$\gamma', m, n \ldots r, \beta', K_0 \ldots K_{\mu-1}$$

treten, wird $\equiv \mu \pmod{2}$ sein (nach §. 80), da der Werth des ganzen Kettenbruchs *positiv* ist. Da nun ω_0 nur auf eine einzige Weise als ein regelmässiger Kettenbruch dargestellt werden kann, so müssen die Zahlen

$$K_\mu, K_{\mu+1}, K_{\mu+2} \ldots\ldots$$

resp. mit den Zahlen

$$k_\nu, k_{\nu+1}, k_{\nu+2}, \ldots\ldots$$

identisch sein. Ist daher $\mu + h$ ein Multiplum von der Anzahl der Formen, welche die Periode der Form Φ_0 bilden, und also eine gerade Zahl, so ist auch $\nu + h$ eine gerade Zahl $= 2m$, und die Zahlen

$$K_{\mu+h}, K_{\mu+h+1}, K_{\mu+h+2} \ldots$$

stimmen mit den Zahlen

$$K_0, K_1, K_2 \ldots,$$

und diese folglich mit den Zahlen

$$k_{2m}, k_{2m+1}, k_{2m+2} \ldots$$

überein. Hieraus folgt unmittelbar

$$\Omega_0 = (k_{2m}, k_{2m+1} \ldots) = \omega_{2m};$$

und da durch ihre erste Wurzel auch stets die Form vollständig charakterisirt ist (§. 72), so schliessen wir hieraus, dass die Form Φ_0 mit der Form φ_{2m} identisch sein muss, dass also Φ_0 sich in der aus φ_0 entwickelten Periode befinden muss. Wir haben so folgenden *Hauptsatz* *) gewonnen:

Zwei äquivalente reducirte Formen von positiver Determinante gehören einer und derselben Periode an; zwei reducirte Formen können nicht äquivalent sein, wenn sie verschiedenen Perioden angehören.

Mit Hülfe dieses Satzes ergiebt sich nun eine Methode, um zu prüfen, ob zwei gegebene Formen von gleicher positiver Determinante äquivalent sind oder nicht. Man suche (nach §. 76) zu jeder der beiden Formen eine ihr äquivalente reducirte Form; je nachdem die so gefundenen reducirten Formen derselben oder verschiedenen Perioden angehören, sind die gegebenen Formen

*) *Gauss: D. A.* art. 193.