Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie

Autor: Dirichlet, Peter

Verlag: Vieweg

Ort: Braunschweig

Jahr: 1871

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN30976923X

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN30976923X|LOG_0092

OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X

$$\frac{\gamma}{\alpha} = (k_0, k \ \ldots \ k_{2hn-2}), \quad \frac{\delta}{\beta} = (k_0, k_1 \ \ldots \ k_{2hn-2}, k_{2hn-1})$$

was zu beweisen war.

Nachdem wir gezeigt haben, wie wir alle aus vier *positiven* Coefficienten bestehenden Transformationen der reducirten Form (a, b, c) in sich selbst finden können, deren erster Coefficient a *positiv* ist, brauchen wir nur noch einen Blick auf die obigen Formeln

$$\alpha = \frac{t - bu}{\sigma}, \quad \beta = -\frac{cu}{\sigma}, \quad \gamma = \frac{au}{\sigma}, \quad \delta = \frac{t + bu}{\sigma}$$

zu werfen, um sogleich zu erkennen, dass die hieraus resultirenden Auflösungen t, u der unbestimmten Gleichung stets aus zwei *positiven* Zahlen t, u bestehen. Für u folgt dies aus der dritten Formel; da ferner, wie wir gesehen haben, $\delta > \gamma$ und $\gamma \geqq \alpha$, also $\delta > \alpha$ ist, so ergiebt sich, dass auch t positiv ist. Das Umgekehrte ist ebenfalls richtig; sind t, u zwei positive der unbestimmten Gleichung genügende Zahlen, so besteht die aus denselben abgeleitete Substitution $\binom{\alpha, \beta}{\gamma, \delta}$ aus vier positiven Zahlen; denn da die Form (a, b, c) reducirt, also b positiv, und der Annahme nach a positiv, also c negativ ist, so sind zunächst β, γ, δ positiv; endlich ist $t^2 - b^2u^2 = \sigma^2 - acu^2$ positiv, folglich hat $t - bu$, also auch α, dasselbe Zeichen wie $t + bu$, nämlich das positive.

§. 84.

Wir können daher behaupten, dass alle aus zwei positiven Zahlen t, u bestehenden Auflösungen — und auf diese kommt es uns zunächst allein an — durch die Kettenbruchentwicklung der Wurzel ω der Form (a, b, c) gefunden werden, und zwar jede nur ein einziges Mal. Aus dem Anblick der unbestimmten Gleichung $t^2 - Du^2 = \sigma^2$ geht aber hervor, dass die zusammengehörigen positiven Werthe t, u gleichzeitig wachsen und gleichzeitig abnehmen; dasselbe folgt auch aus der Natur der Zähler und Nenner der Näherungsbrüche; u, und folglich auch t, wird gleichzeitig mit γ, also auch mit der von uns mit h bezeichneten Zahl wachsen; nehmen wir $h = 1$, so wird die entsprechende Auflösung, die wir mit (T, U) bezeichnen wollen, aus den kleinsten Zahlen bestehen,

d. h. T wird die kleinste aller Zahlen t, und gleichzeitig wird U die kleinste aller Zahlen u sein (die Auflösung $t = \sigma$, $u = 0$ gehört natürlich nicht zu den positiven Auflösungen). Diese kleinste Auflösung T, U findet man daher sehr leicht durch Entwicklung einer Periode von reducirten Formen.

Beispiel 1: Nimmt man für die Determinante $D = 79$ die reducirte Form $(7, 3, -10)$, welche natürlich von der ersten Art ist, so erhält man (§. 79)

$$k_0 = 1,\ k_1 = 5,\ k_2 = 3,\ k_3 = 2,\ k_4 = 1,\ k_5 = 1;$$

die successiven Näherungsbrüche sind folgende:

$$\frac{1}{1},\ \frac{6}{5},\ \frac{19}{16},\ \frac{44}{37},\ \frac{63}{53},\ \frac{107}{90};$$

aus den beiden letzten ergiebt sich daher die Substitution $\binom{53,\ 90}{63,\ 107}$; will man nur die kleinste Auflösung der Gleichung $t^2 - Du^2 = \sigma^2$, so braucht man nur die Nenner der Näherungsbrüche bis $\beta = 90$, oder die Zähler derselben bis $\gamma = 63$ zu bilden, so findet man durch die Formeln $\beta\sigma = -cu$ oder $\gamma\sigma = au$ die kleinste der Zahlen u, nämlich $U = 9$, und hieraus das zugehörige $T = \sqrt{(\sigma^2 + DU^2)} = 80$. Statt dessen findet man T auch durch die Formel $\alpha\sigma + bU$ oder $\delta\sigma - bU$.

Nimmt man die reducirte Form $(1, 8, -15)$, so findet man folgende Zahlen (§. 79)

$$k_0 = 1,\ k_1 = 7,\ k_2 = 1,\ k_3 = 16;$$

also die Näherungsbrüche

$$\frac{1}{1},\ \frac{8}{7},\ \frac{9}{8},\ \frac{152}{135};$$

die beiden letzten liefern die Substitution $\binom{8,\ 135}{9,\ 152}$, und hieraus ergiebt sich wieder $U = 9$, $T = 80$, wie vorher.

Beispiel 2: Es sei $D = 13 \equiv 1 \pmod{4}$; um die kleinste Auflösung der Gleichung $t^2 - 13u^2 = 4$ zu finden, nehmen wir die reducirte Form $(2, 3, -2)$, so ist (§. 79)

$$k_0 = 3,\ k_1 = 3;$$

die Näherungsbrüche sind also $\frac{3}{1}$ und $\frac{10}{3}$; dadurch erhalten wir die Substitution $\binom{1,\ 3}{3,\ 10}$ und hieraus $U = 3$, $T = 11$.