

Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie

Autor: Dirichlet, Peter

Verlag: Vieweg

Ort: Braunschweig

Jahr: 1871

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN30976923X

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN30976923X|LOG_0092

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

$$\frac{\gamma}{\alpha} = (k_0, k_1 \dots k_{2hn-2}), \quad \frac{\delta}{\beta} = (k_0, k_1 \dots k_{2hn-2}, k_{2hn-1})$$

was zu beweisen war.

Nachdem wir gezeigt haben, wie wir alle aus vier *positiven* Coefficienten bestehenden Transformationen der reducirten Form (a, b, c) in sich selbst finden können, deren erster Coefficient a *positiv* ist, brauchen wir nur noch einen Blick auf die obigen Formeln

$$\alpha = \frac{t - bu}{\sigma}, \quad \beta = -\frac{cu}{\sigma}, \quad \gamma = \frac{au}{\sigma}, \quad \delta = \frac{t + bu}{\sigma}$$

zu werfen, um sogleich zu erkennen, dass die hieraus resultirenden Auflösungen t, u der unbestimmten Gleichung stets aus zwei *positiven* Zahlen t, u bestehen. Für u folgt dies aus der dritten Formel; da ferner, wie wir gesehen haben, $\delta > \gamma$ und $\gamma \geq \alpha$, also $\delta > \alpha$ ist, so ergibt sich, dass auch t positiv ist. Das Umgekehrte ist ebenfalls richtig; sind t, u zwei positive der unbestimmten Gleichung genügende Zahlen, so besteht die aus denselben abgeleitete Substitution $(\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\delta})$ aus vier positiven Zahlen; denn da die Form (a, b, c) reducirt, also b positiv, und der Annahme nach a positiv, also c negativ ist, so sind zunächst β, γ, δ positiv; endlich ist $t^2 - b^2u^2 = \sigma^2 - acu^2$ positiv, folglich hat $t - bu$, also auch α , dasselbe Zeichen wie $t + bu$, nämlich das positive.

§. 84.

Wir können daher behaupten, dass alle aus zwei positiven Zahlen t, u bestehenden Auflösungen — und auf diese kommt es uns zunächst allein an — durch die Kettenbruchentwicklung der Wurzel ω der Form (a, b, c) gefunden werden, und zwar jede nur ein einziges Mal. Aus dem Anblick der unbestimmten Gleichung $t^2 - Du^2 = \sigma^2$ geht aber hervor, dass die zusammengehörigen positiven Werthe t, u gleichzeitig wachsen und gleichzeitig abnehmen; dasselbe folgt auch aus der Natur der Zähler und Nenner der Näherungsbrüche; u , und folglich auch t , wird gleichzeitig mit γ , also auch mit der von uns mit h bezeichneten Zahl wachsen; nehmen wir $h = 1$, so wird die entsprechende Auflösung, die wir mit (T, U) bezeichnen wollen, aus den kleinsten Zahlen bestehen,

d. h. T wird die kleinste aller Zahlen t , und gleichzeitig wird U die kleinste aller Zahlen u sein (die Auflösung $t = \sigma$, $u = 0$ gehört natürlich nicht zu den positiven Auflösungen). Diese kleinste Auflösung T, U findet man daher sehr leicht durch Entwicklung einer Periode von reducirten Formen.

Beispiel 1: Nimmt man für die Determinante $D = 79$ die reducirte Form $(7, 3, -10)$, welche natürlich von der ersten Art ist, so erhält man (§. 79)

$$k_0 = 1, k_1 = 5, k_2 = 3, k_3 = 2, k_4 = 1, k_5 = 1;$$

die successiven Näherungsbrüche sind folgende:

$$\frac{1}{1}, \frac{6}{5}, \frac{19}{16}, \frac{44}{37}, \frac{63}{53}, \frac{107}{90};$$

aus den beiden letzten ergibt sich daher die Substitution $\begin{pmatrix} 53 & 90 \\ 63 & 107 \end{pmatrix}$; will man nur die kleinste Auflösung der Gleichung $t^2 - Du^2 = \sigma^2$, so braucht man nur die Nenner der Näherungsbrüche bis $\beta = 90$, oder die Zähler derselben bis $\gamma = 63$ zu bilden, so findet man durch die Formeln $\beta\sigma = -cu$ oder $\gamma\sigma = au$ die kleinste der Zahlen u , nämlich $U = 9$, und hieraus das zugehörige $T = \sqrt{\sigma^2 + DU^2} = 80$. Statt dessen findet man T auch durch die Formel $\alpha\sigma + bU$ oder $\delta\sigma - bU$.

Nimmt man die reducirte Form $(1, 8, -15)$, so findet man folgende Zahlen (§. 79)

$$k_0 = 1, k_1 = 7, k_2 = 1, k_3 = 16;$$

also die Näherungsbrüche

$$\frac{1}{1}, \frac{8}{7}, \frac{9}{8}, \frac{152}{135};$$

die beiden letzten liefern die Substitution $\begin{pmatrix} 8 & 135 \\ 9 & 152 \end{pmatrix}$, und hieraus ergibt sich wieder $U = 9$, $T = 80$, wie vorher.

Beispiel 2: Es sei $D = 13 \equiv 1 \pmod{4}$; um die kleinste Auflösung der Gleichung $t^2 - 13u^2 = 4$ zu finden, nehmen wir die reducirte Form $(2, 3, -2)$, so ist (§. 79)

$$k_0 = 3, k_1 = 3;$$

die Näherungsbrüche sind also $\frac{3}{1}$ und $\frac{10}{3}$; dadurch erhalten wir die Substitution $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$ und hieraus $U = 3$, $T = 11$.