Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie
Autor: Dirichlet, Peter
Verlag: Vieweg
Ort: Braunschweig
Jahr: 1871
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN30976923X
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X

LOG Id: LOG_0093
LOG Titel: § 85. Darstellung aller Auflösungen der Pell'schen Gleichung durch die kleinste positive Auflösung derselben.
LOG Typ: chapter

§. 85.

Nachdem wir gezeigt haben, wie die kleinste positive Auflösung (T, U) der unbestimmten Gleichung immer gefunden werden kann, gehen wir dazu über, alle anderen Auflösungen (t, u) auf diese eine zurückzuführen. Der Bequemlichkeit halber wollen wir, wenn t, u irgend zwei (positive oder negative) der Gleichung $t^2 - Du^2 = \sigma^2$ genügende Zahlen sind, und $\sqrt{D}$ stets positiv genommen wird, die Ausdrücke

$$\frac{t + u\sqrt{D}}{\sigma}, \quad \frac{t - u\sqrt{D}}{\sigma}$$

die zu dieser Auflösung (t, u) gehörigen Factoren nennen und als *ersten* und *zweiten Factor* von einander unterscheiden; das Product beider ist stets $= 1$; sie haben daher immer gleiche Zeichen, und zwar das positive oder negative, je nachdem t positiv oder negativ ist; haben ferner t und u gleiche Zeichen, so ist der erste Factor numerisch grösser als der zweite, folglich ist dann der erste numerisch > 1, der zweite numerisch < 1; das Gegentheil findet Statt, wenn t und u entgegengesetzte Zeichen haben; und wenn $u = 0$ ist, sind beide Factoren $= \pm 1$. Ist also z. B. (t, u) eine aus zwei positiven Zahlen bestehende Auflösung, so ist ihr erster Factor ein positiver unechter Bruch; und umgekehrt, ist der erste Factor ein positiver unechter Bruch, so sind beide Zahlen t, u positiv.

Sind (t', u') und (t'', u'') irgend zwei identische oder verschiedene Auflösungen, so kann man

$$\frac{t' + u'\sqrt{D}}{\sigma} \cdot \frac{t'' + u''\sqrt{D}}{\sigma} = \frac{t + u\sqrt{D}}{\sigma}$$

setzen, wo (t, u) wieder eine Auflösung bedeutet. Denn entwickelt man das Product links und trennt das Rationale vom Irrationalen, so findet man

$$t = \frac{t't'' + Du'u''}{\sigma}, \quad u = \frac{t'u'' + u't''}{\sigma};$$

da ferner aus der obigen Gleichung unmittelbar durch Verwandlung von $\sqrt{D}$ in $-\sqrt{D}$ oder auch durch den blossen Anblick der Ausdrücke für t, u die andere Gleichung

$$\frac{t' - u'\sqrt{D}}{\sigma} \cdot \frac{t'' - u''\sqrt{D}}{\sigma} = \frac{t - u\sqrt{D}}{\sigma}$$

folgt, so ergiebt sich durch Multiplication beider

$$t^2 - Du^2 = \sigma^2;$$

es braucht daher nur noch gezeigt zu werden, dass u eine ganze Zahl ist, weil dann aus der vorstehenden Gleichung von selbst folgt, dass t^2, also auch t eine ganze Zahl ist. Geht nun σ^2 in D, folglich auch in t'^2, t''^2 auf, so sind t', t'' theilbar durch σ, und folglich ist u eine ganze Zahl; ist aber $4D \equiv \sigma^2 \pmod{4\sigma^2}$, so folgt $(2t')^2 \equiv (\sigma u')^2 \pmod{4\sigma^2}$, hieraus $2t' \equiv \sigma u'$, und ebenso $2t'' \equiv \sigma u'' \pmod{2\sigma}$, folglich $2(t'u'' + u't'') \equiv 2\sigma u'u'' \equiv 0 \pmod{2\sigma}$; mithin ist u auch jetzt eine ganze Zahl, w. z. b. w.

Dieser Satz lässt sich ohne Weiteres auf beliebig viele Auflösungen (t', u'), (t'', u''), (t''', u''') . . . ausdehnen: setzt man

$$\frac{t' + u'\sqrt{D}}{\sigma} \cdot \frac{t'' + u''\sqrt{D}}{\sigma} \cdot \frac{t''' + u'''\sqrt{D}}{\sigma} \cdots = \frac{t + u\sqrt{D}}{\sigma},$$

so wird (t, u) stets wieder eine ganzzahlige Auflösung sein. Bestehen ferner alle jene Auflösungen aus zwei positiven Zahlen, so sind alle Factoren linker Hand positive unechte Brüche; dasselbe gilt also auch von dem ersten Factor der Auflösung (t, u), und folglich sind t, u zwei positive Zahlen.

Setzen wir alle die einzelnen Auflösungen (t', u'), (t'', u'') . . . identisch mit der kleinsten positiven Auflösung (T, U), so können wir

$$\left(\frac{T + U\sqrt{D}}{\sigma}\right)^n = \frac{t_n + u_n\sqrt{D}}{\sigma}$$

setzen, wo n eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet, und es wird dann (t_n, u_n) jedesmal eine positive Auflösung werden; zugleich leuchtet ein, dass mit wachsendem Exponenten n der Werth der linker Hand stehenden Potenz eines unechten Bruchs, und folglich auch $t_n + u_n\sqrt{D}$ beständig wächst, so dass verschiedene Werthe von n auch verschiedene Auflösungen (t_n, u_n) liefern; und da die beiden Zahlen t_n, u_n entweder beide gleichzeitig wachsen, oder beide gleichzeitig abnehmen, so tritt offenbar das erstere oder letztere ein, je nachdem n wächst oder abnimmt.

Umgekehrt können wir zeigen, dass durch die vorstehende Formel in der That jede positive Auflösung (t, u) geliefert wird. Denn wäre der erste Factor einer solchen Auflösung keine genaue Potenz des ersten Factors der kleinsten Auflösung (T, U), so müsste er, da beide positive unechte Brüche sind, zwischen zwei successiven Potenzen

$$\left(\frac{T+U\sqrt{D}}{\sigma}\right)^n \text{ und } \left(\frac{T+U\sqrt{D}}{\sigma}\right)^{n+1}$$

des letztern liegen, wo n mindestens $= 1$ ist. Dann wäre also

$$\frac{t_n+u_n\sqrt{D}}{\sigma} < \frac{t+u\sqrt{D}}{\sigma} < \frac{t_n+u_n\sqrt{D}}{\sigma} \cdot \frac{T+U\sqrt{D}}{\sigma},$$

und folglich, wenn man

$$\frac{t+u\sqrt{D}}{\sigma} \cdot \frac{t_n-u_n\sqrt{D}}{\sigma} = \frac{t'+u'\sqrt{D}}{\sigma}$$

setzt,

$$1 < \frac{t'+u'\sqrt{D}}{\sigma} < \frac{T+U\sqrt{D}}{\sigma};$$

es existirte daher eine positive Auflösung (t', u'), welche aus kleineren Zahlen t', u' bestände, als die kleinste Auflösung (T, U); was unmöglich ist.

Man findet daher alle aus zwei positiven Zahlen bestehenden Auflösungen durch die Formeln

$$\frac{t_n}{\sigma} = \frac{1}{\sigma^n}\left\{T^n + \frac{n(n-1)}{1.2} T^{n-2} U^2 D + \cdots\right\}$$

$$\frac{u_n}{\sigma} = \frac{1}{\sigma^n}\left\{\frac{n}{1} T^{n-1} U + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} T^{n-3} U^3 D + \cdots\right\}$$

wenn man der Reihe nach für n alle positiven ganzen Zahlen setzt. Da nun ferner

$$\frac{t_n-u_n\sqrt{D}}{\sigma} = \left(\frac{T-U\sqrt{D}}{\sigma}\right)^n = \left(\frac{T+U\sqrt{D}}{\sigma}\right)^{-n}$$

ist, so ergiebt sich, dass durch die Formel

$$\frac{t_n+u_n\sqrt{D}}{\sigma} = \left(\frac{T+U\sqrt{D}}{\sigma}\right)^n$$

sämmtliche Auflösungen t_n, u_n gegeben sind, in welchen t_n positiv ist, wenn man für n alle ganzen positiven und negativen Zahlen setzt, indem $u_{-n} = -u_n$, $t_{-n} = t_n$ ist. Für $n = 0$ ergiebt sich ferner $t_0 = +\sigma$, $u_0 = 0$. Will man daher alle Auflösungen t, u ohne Ausnahme in eine Formel zusammendrängen, so braucht man nur

$$\frac{t+u\sqrt{D}}{\sigma} = \pm\left(\frac{T+U\sqrt{D}}{\sigma}\right)^n$$

zu setzen, und hierin jedes der beiden Vorzeichen mit jedem ganzzahligen Exponenten n zu combiniren. Dass auf diese Weise keine Auflösung übergangen, und jede nur einmal erzeugt wird, folgt unmittelbar daraus, dass unter den vier verschiedenen Auflösungen

$$(t, u), (t, -u), (-t, u), (-t, -u),$$

wenn u nicht $= 0$ ist, immer eine und nur eine aus zwei positiven Zahlen besteht.

Hiermit ist nun das zweite Hauptproblem der Lehre von der Aequivalenz auch für Formen von *positiver* Determinante vollständig gelöst. Wir sind durch die vollständige Auflösung der unbestimmten Gleichung $t^2 - Du^2 = \sigma^2$ in den Stand gesetzt, alle Transformationen einer solchen Form in sich selbst, und folglich auch alle Transformationen einer Form in eine äquivalente aus einer einzigen gegebenen solchen Transformation zu finden (§§. 61, 62); mithin ist auch die Aufgabe, alle eigentlichen Darstellungen einer gegebenen Zahl durch eine gegebene Form von positiver Determinante zu finden, als vollständig gelöst anzusehen (§. 60).