Fünfter Abschnitt.

Bestimmung der Anzahl der Classen, in welche die binären quadratischen Formen von gegebener Determinante zerfallen.

§. 86.

Wir schreiten nun, nachdem die elementaren Theile der Theorie der quadratischen Formen behandelt sind, zu tieferen Untersuchungen, und namentlich zur *Bestimmung der Classenanzahl der nicht äquivalenten Formen von einer gegebenen Determinante* *). Wir beschränken uns dabei auf *ursprüngliche Formen der ersten oder zweiten Art* (§. 61), ferner, wenn die Determinante *negativ* ist, auf die Formen mit *positiven äusseren Coefficienten*, da die Classenanzahl der anderen Formen offenbar genau ebenso gross ist (§. 64). Unter diesen Beschränkungen denken wir uns ein vollständiges Formensystem S der σten Art für die Determinante D gebildet (§. 59). Zur Bestimmung der Anzahl der in diesem System S enthaltenen Formen führt die Betrachtung

*) *G. Lejeune Dirichlet*: *Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres*, Crelle's Journal XIX, XXI. — Vergl. *Gauss*: *D. A.* Additam. ad art. 306. X, und die nachgelassenen Abhandlungen: *De nexu inter multitudinem classium in quas formae binariae secundi gradus distribuuntur earumque determinantem*; Gauss' Werke Bd. II. 1863.

und genaue Definition aller durch sie darstellbaren Zahlen. Da durch eine Form der zweiten Art nur gerade Zahlen dargestellt werden können, so bezeichnen wir, um beide Fälle zusammenzufassen, die darstellbaren Zahlen allgemein mit σm, und ausserdem beschränken wir uns auf die Betrachtung derjenigen, in welchen *m positiv, ungerade und relative Primzahl gegen die Determinante D* ist. Endlich beschränken wir uns vorläufig noch auf *eigentliche* Darstellungen, d. h. auf die Annahme, dass die beiden darstellenden Zahlen x, y relative Primzahlen sind (§. 60).

Um den Charakter dieser Zahlen m genau festzustellen, erinnern wir uns, dass die Determinante D quadratischer Rest von jeder darstellbaren Zahl σm, d. h. dass die Congruenz

$$z^2 \equiv D \pmod{\sigma m}$$

möglich ist (§. 60). Es können daher in der ungeraden Zahl m nur solche Primzahlen f aufgehen, für welche

$$\left(\frac{D}{f}\right) = 1$$

ist. Umgekehrt: enthält m nur solche Primzahlen f, und ist die Anzahl der verschiedenen unter ihnen $= \mu$ (wo der Fall $\mu = 0$ nicht ausgeschlossen bleibt), so ist D quadratischer Rest von m, also auch von σm, und die obige Congruenz hat genau 2^μ incongruente Wurzeln (§. 37). Ist n ein bestimmter Repräsentant einer bestimmten dieser Wurzeln, so können wir $n^2 - D = \sigma^2 m l$ setzen, wo l eine ganze Zahl bedeutet (denn wenn $\sigma = 2$, also $D \equiv 1 \pmod{4}$ ist, so ist n ungerade, also $n^2 - D$ durch $\sigma^2 = 4$ theilbar). Dann ist $(\sigma m, n, \sigma l)$, weil m relative Primzahl zu $2D$, eine ursprüngliche Form der σten Art von der Determinante D und folglich einer und nur einer in dem System S enthaltenen Form äquivalent*). Ist (a, b, c) diese Form des Systems, so liefert nur sie solche Darstellungen (x, y) der Zahl σm, welche zu der durch n repräsentirten Wurzel der obigen Congruenz gehören, ~~und zwar ebenso viele verschiedene~~ solche Darstellungen (x, y), als es Transformationen $\begin{pmatrix} x, & \xi \\ y, & \eta \end{pmatrix}$ der Form (a, b, c) in die Form $(\sigma m, n, \sigma l)$, d. h. ebenso viele, als es Auflösungen (t, u) der unbestimmten Gleichung $t^2 - D u^2 = \sigma^2$ giebt (§§. 60, 61, 62). Den Complex aller dieser

*) Da der Coefficient σm positiv ist, so gilt dies auch für den Fall, in welchem D negativ ist, und also S nur Formen mit positiven äusseren Coefficienten enthält.

Darstellungen der Zahl σm, welche zu einer und derselben durch n repräsentirten Wurzel der obigen Congruenz gehören, wollen wir eine *Gruppe* von Darstellungen nennen. Den 2^μ incongruenten Wurzeln dieser Congruenz entsprechen daher 2^μ solche Gruppen von Darstellungen derselben Zahl σm durch Formen des Systemes S, und in jeder Gruppe sind ebenso viel Darstellungen enthalten, als es Auflösungen der Gleichung $t^2 - Du^2 = \sigma^2$ giebt.

Das System der Zahlen m ist nun also vollständig definirt durch die Bedingungen:

1. *m ist positiv;*
2. *m ist relative Primzahl gegen $2D$;*
3. *D ist quadratischer Rest von m.*

§. 87.

Jetzt haben wir die Darstellungen von σm, welche einer und derselben Gruppe angehören genauer zu betrachten.

Für den Fall einer *negativen* Determinante D ist die Anzahl $\varkappa$ der Auflösungen (t, u) der unbestimmten Gleichung $t^2 - Du^2 = \sigma^2$ endlich; dieselbe ist zugleich die Anzahl aller zu einer Gruppe gehörenden Darstellungen einer jeden Zahl σm; bedeutet also μ wieder die Anzahl der verschiedenen in m aufgehenden Primzahlen f, so ist 2^μ die Anzahl der Gruppen, deren jede $\varkappa$ Darstellungen enthält, und folglich ist

$$\varkappa \,.\, 2^\mu$$

die Gesammtanzahl aller Darstellungen der Zahl σm; und hierin ist (§. 62)

$$\varkappa = 2 \text{ im Allgemeinen;}$$
$$\varkappa = 4, \text{ wenn } D = -1,$$
$$\varkappa = 6, \text{ wenn } D = -3 \text{ und } \sigma = 2$$

ist.

Für den Fall einer *positiven* Determinante D dagegen ist die Anzahl der Auflösungen (t, u) der unbestimmten Gleichung $t^2 - Du^2 = \sigma^2$, und folglich auch die Anzahl der in jeder der 2^μ Gruppen enthaltenen Darstellungen der Zahl σm *unendlich gross*. Wir gehen daher zunächst darauf aus, durch neue Bedingungen, welche den darstellenden Zahlen x, y aufzuerlegen sind, aus den unendlich vielen in einer Gruppe enthaltenen Darstellungen stets *eine einzige* zu isoliren. Dazu betrachten wir die allgemeine Form aller derselben Gruppe angehörenden Darstellungen (x, y) der Zahl σm. Ist wieder (a, b, c) die Form des Systems S, mit welcher die Form $(\sigma m, n, \sigma l)$ äquivalent ist, und ist $\binom{\alpha, \beta}{\gamma, \delta}$ eine bestimmte Transformation der erstern Form in die letztere, so erhält man (nach §. 61) aus dieser einen alle anderen durch die Zusammensetzung

$$\begin{pmatrix}\lambda, \mu \\ \nu, \varrho\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha, \beta \\ \gamma, \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\alpha + \mu\gamma, \lambda\beta + \mu\delta \\ \nu\alpha + \varrho\gamma, \nu\beta + \varrho\delta\end{pmatrix}$$

aller Substitutionen $\binom{\lambda, \mu}{\nu, \varrho}$, durch welche (a, b, c) in sich selbst übergeht, mit dieser bestimmten Substitution $\binom{\alpha, \beta}{\gamma, \delta}$. Da nun (nach §. 60) jedesmal der erste und dritte Coefficient einer solchen Substitution eine zu der Wurzel n gehörende Darstellung liefern, und da auch umgekehrt jede solche Darstellung (x, y) auf diese Weise, und zwar nur ein einziges Mal erzeugt wird, so ist die allgemeine Form aller dieser Darstellungen folgende:

$$x = \lambda\alpha + \mu\gamma, \quad y = \nu\alpha + \varrho\gamma;$$

da (α, γ) selbst eine solche Darstellung ist, so kann man sagen, dass diese beiden Gleichungen aus einer bestimmten Darstellung (α, γ) alle derselben Gruppe angehörenden Darstellungen (x, y) finden lehren. Nun war aber (§. 62)

$$\lambda = \frac{t - bu}{\sigma}, \quad \mu = -\frac{cu}{\sigma},$$

$$\nu = \frac{au}{\sigma}, \quad \varrho = \frac{t + bu}{\sigma},$$

wo (t, u) jede beliebige Auflösung der Gleichung $t^2 - Du^2 = \sigma^2$ bedeutete; folglich erhalten wir

$$x = \alpha\frac{t}{\sigma} - (b\alpha + c\gamma)\frac{u}{\sigma}, \quad y = \gamma\frac{t}{\sigma} + (a\alpha + b\gamma)\frac{u}{\sigma}.$$

Für alle diese Werthe ist daher

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \sigma m;$$

durch Multiplication mit dem ersten Coefficienten ergiebt sich wie früher

$$\sigma am = (ax + (b + \sqrt{D})y)(ax + (b - \sqrt{D})y),$$

und es tritt nun die höchst merkwürdige Erscheinung auf, dass jeder der beiden irrationalen Factoren rechter Hand eine geometrische Reihe constituirt; setzt man nämlich die vorstehenden Werthe von x, y ein, so ergiebt sich leicht

$$ax + (b + \sqrt{D})y = (a\alpha + (b + \sqrt{D})\gamma)\,\frac{t + u\sqrt{D}}{\sigma},$$

$$ax + (b - \sqrt{D})y = (a\alpha + (b - \sqrt{D})\gamma)\,\frac{t - u\sqrt{D}}{\sigma};$$

wenn man also mit T, U wie früher die kleinsten positiven Werthe von t, u bezeichnet und zur Abkürzung den positiven unechten Bruch

$$\frac{T + U\sqrt{D}}{\sigma} = \theta$$

setzt, so ist (nach §. 85)

$$ax + (b + \sqrt{D})y = \pm (a\alpha + (b + \sqrt{D})\gamma)\,\theta^n$$
$$ax + (b - \sqrt{D})y = \pm (a\alpha + (b - \sqrt{D})\gamma)\,\theta^{-n}$$

wo n eine beliebige positive oder negative ganze Zahl oder Null sein kann. Wir betrachten nur die erste dieser beiden Gleichungen, da aus ihr die zweite schon von selbst folgt. Ist nun k irgend ein von Null verschiedener reeller Zahlwerth, so leuchtet ein, dass man das Vorzeichen der rechten Seite und den Exponenten n stets und nur auf eine einzige Weise so bestimmen kann, dass der algebraische Werth von $ax + (b + \sqrt{D})y$ zwischen den Grenzen k und $k\theta$ liegt; denn nachdem das Zeichen $\pm$ so gewählt ist, dass $\pm (a\alpha + (b + \sqrt{D})\gamma)$ gleichstimmig mit k wird, giebt es nur noch ein einziges Glied der geometrischen Reihe zwischen den beiden vorgeschriebenen Grenzen, wenn man, um für jeden Fall Unbestimmtheit zu vermeiden, die eine derselben, z. B. $k\theta$, von dem Intervall ausschliesst. Durch diese Forderung für den Werth von $ax + (b + \sqrt{D})y$ ist dann aus der unendlichen Anzahl von Darstellungen (x, y) eine einzige vollständig isolirt. Es kommt jetzt nur noch darauf an, k zweckmässig zu wählen.

Dazu können wir immer voraussetzen, dass die, eine ganze Classe repräsentirende, Form (a, b, c) des Systems S einen *positiven* ersten Coefficienten a hat; denn es giebt ja in jeder Classe sogar reducirte Formen, welche diese Eigenschaft haben: Wir machen daher von jetzt ab diese Voraussetzung über die Wahl der in S enthaltenen Formen (für negative Determinanten haben wir schon früher dieselbe Forderung gemacht, um dort die eine Hälfte aller Classen ganz von der Betrachtung auszuschliessen) und müssen sie dann natürlich für alles Folgende festhalten. Dann wählen wir für k die *positive* Quadratwurzel aus σam, was gestattet ist, da wir nur die positiven darstellbaren Zahlen σm betrachten. Wir stellen also die Bedingungen

$$\sqrt{\sigma am} \leqq ax + (b + \sqrt{D})y < \theta\sqrt{\sigma am}$$

auf, um aus allen derselben Gruppe angehörigen Darstellungen von σm durch (a, b, c) eine einzige (x, y) zu isoliren. Sie lassen sich, da ihre drei Glieder positiv sind, so umformen: quadrirt man, und bedenkt, dass σam das Product aus zwei positiven irrationalen Factoren ist, so erhält man leicht durch Division

$$ax + (b - \sqrt{D})y \leqq ax + (b + \sqrt{D})y < \theta^2(ax + (b - \sqrt{D})y);$$

durch Vergleichung der beiden ersten Glieder ergiebt sich, da $\sqrt{D}$ stets *positiv* genommen wird, die Bedingung

$$y \geqq 0;$$

die beiden letzten Glieder geben durch Umstellung und Restitution des Werthes von θ die Bedingung

$$ax + by > \frac{T}{U}y.$$

Umgekehrt überzeugt man sich leicht, dass aus diesen beiden Bedingungen

$$y \geqq 0, \quad ax + by > \frac{T}{U}y$$

rückwärts die obigen ursprünglichen Isolirungsbedingungen folgen.

Ausserdem zeigt sich, was besonders zu bemerken ist, dass in Folge dieser beiden Bedingungen auch der Werth der Form $ax^2 + 2bxy + cy^2$ von selbst positiv ausfällt; denn da $T > U\sqrt{D}$ ist, so ergiebt sich durch Addition von $\pm y\sqrt{D}$ auf beiden Seiten der zweiten Bedingung, dass die beiden Factoren

$$ax + (b + \sqrt{D})y, \quad ax + (b - \sqrt{D})y$$

positiv sind, woraus dasselbe für ihr Product und also, da a positiv ist, auch für $ax^2 + 2bxy + cy^2$ folgt (für Formen von negativer Determinante versteht sich dies von selbst, da wir nur solche betrachten, deren äussere Coefficienten positiv sind).

§. 88.

Mit Rücksicht auf diese letzte Bemerkung können wir nun das Vorhergehende in folgender Weise noch einmal zusammenfassen:

Es sei S ein vollständiges System ursprünglicher Formen

$$(a, b, c), \quad (a', b', c') \ldots$$

der σten Art für eine gegebene Determinante D, mit positiven ersten Coefficienten $a, a' \ldots$ Dann setze man in jede dieser Formen, z. B. (a, b, c), für die Variabeln alle ganzzahligen Werthenpaare x, y ein, welche folgenden Bedingungen genügen:

I. $\dfrac{ax^2 + 2bxy + cy^2}{\sigma}$ *ist relative Primzahl zu* $2D$;

II. *im Fall einer positiven Determinante D ist*

$$y \geqq 0, \quad ax + by > \frac{T}{U} y$$

wo T, U die kleinsten positiven der Gleichung

$$T^2 - DU^2 = \sigma^2$$

genügenden ganzen Zahlen bedeuten;

III. *x und y sind relative Primzahlen zu einander.*

Auf diese Weise werden durch die Formen S alle ganzen Zahlen σm und nur solche dargestellt, welche folgenden Bedingungen genügen:

1. *m ist positiv,*
2. *m ist relative Primzahl zu $2D$,*
3. *D ist quadratischer Rest von m,*

und die Gesammtanzahl dieser Darstellungen einer jeden solchen Zahl σm ist gleich

$$\varkappa \,.\, 2^{\mu},$$

wo μ die Anzahl der in m aufgehenden verschiedenen Primzahlen bedeutet, während $\varkappa$ von m unabhängig ist, nämlich

$$\begin{aligned} \varkappa &= 1 \text{ für positive Determinanten } D, \\ &= 4 \text{ für } D = -1, \\ &= 6 \text{ für } D = -3 \text{ und } \sigma = 2, \\ &= 2 \text{ in den übrigen Fällen.} \end{aligned}$$

Dasselbe System der unendlich vielen Zahlen m kann daher auf doppelte Art erzeugt werden, erstens durch Zusammensetzung aus den Primzahlen f, von welchen D quadratischer Rest ist, und zweitens durch die Substitution aller erlaubten Zahlenpaare x, y in die Formen des Systems S. Dieses Resultat der früheren Untersuchungen über die Aequivalenz der Formen und die Darstellbarkeit der Zahlen bildet das *Grundprincip* der folgenden Untersuchung. Wir bemerken zunächst, dass die Identität der auf die beiden verschiedenen Arten erzeugten Zahlensysteme nicht aufhören wird, wenn wir von jeder der erzeugten Zahlen eine bestimmte Function ψ nehmen, d. h. es wird wieder Identität bestehen zwischen dem Complex der Zahlen

$$\psi\left(\frac{ax^2+2bxy+cy^2}{\sigma}\right),\quad \psi\left(\frac{a'x^2+2b'xy+c'y^2}{\sigma}\right)\cdots$$

und dem System der Zahlen $\psi(m)$, vorausgesetzt, dass der einem bestimmten Individuum m entsprechende Functionswerth $\psi(m)$ genau $\varkappa\,.\,2^\mu$mal in den letztern Complex aufgenommen wird. Ist daher die sonst ganz beliebige Function ψ so gewählt, dass die *Summe* aller dieser Werthe eine von der Anordnung derselben unabhängige convergente Reihe bildet, so folgt aus der angegebenen Identität die *Fundamentalgleichung*

$$\Sigma\,\psi\left(\frac{ax^2+2bxy+cy^2}{\sigma}\right)+\Sigma\,\psi\left(\frac{a'x^2+2b'xy+c'y^2}{\sigma}\right)+\cdots$$
$$=\varkappa\,\Sigma\,2^\mu\,\psi(m).$$

Die linke Seite derselben besteht aus ebensoviel Hauptsummen, als das System S Formen (a, b, c), (a', b', c') ... enthält, d. h. als es Formenclassen für diese Determinante giebt. Jede Hauptsumme, wie z. B,

$$\Sigma\,\psi\left(\frac{ax^2+2bxy+cy^2}{\sigma}\right)$$

ist eine doppelt unendliche Reihe, deren Glieder den sämmtlichen durch die Bedingungen I., II., III. definirten Zahlenpaaren x, y entsprechen (die Bedingungen I. und II. sind natürlich für die folgende Hauptsumme so zu modificiren, dass (a', b', c') an die Stelle von (a, b, c) tritt). Endlich bezieht sich die rechts angedeutete Summation auf alle aus den Primzahlen f zusammengesetzten Zahlen m, und ebenso behalten μ und $\varkappa$ ihre frühere Bedeutung. Wir specialisiren nun die Function ψ so, dass wir

$$\psi(z) = \frac{1}{z^s}$$

setzen, wo s ein beliebiger positiver Werth, aber > 1 ist; diese letztere Bedingung ist, wie wir später nachträglich zeigen werden, nothwendig, damit die vorstehenden unendlichen Reihen convergiren. Hierdurch geht unsere obige Gleichung in die folgende über:

$$\Sigma \left(\frac{ax^2 + 2\,bxy + cy^2}{\sigma}\right)^{-s} + \cdots = \varkappa\, \Sigma \frac{2^\mu}{m^s},$$

wo der Bequemlichkeit halber links nur eine einzige der den verschiedenen Formen entsprechenden Hauptsummen aufgeschrieben ist.

§. 89.

Wir beschäftigen uns nun zunächst mit einer Umformung*) der rechten Seite dieser Gleichung; zu dem Zweck betrachten wir das System

$$f_1, f_2, f_3 \ldots$$

der sämmtlichen Primzahlen f, welche nicht in $2\,D$ aufgehen, und von welchen D quadratischer Rest ist. Jede der oben definirten Zahlen m ist dann von der Form

$$f_1^{n_1} f_2^{n_2} f_3^{n_3} \ldots,$$

wo die Exponenten $n_1, n_2, n_3 \ldots$ positive ganze Zahlen oder Null sind, und jedes m kann auch nur auf eine einzige Weise in diese Form gebracht werden. Bilden wir nun die diesen Primzahlen entsprechenden unendlichen Reihen

$$1 + \frac{2}{f_1^s} + \frac{2}{f_1^{2s}} + \frac{2}{f_1^{3s}} + \cdots + \frac{2}{f_1^{n_1 s}} + \cdots,$$

$$1 + \frac{2}{f_2^s} + \frac{2}{f_2^{2s}} + \frac{2}{f_2^{3s}} + \cdots + \frac{2}{f_2^{n_2 s}} + \cdots$$

$$1 + \frac{2}{f_3^s} + \frac{2}{f_3^{2s}} + \frac{2}{f_3^{3s}} + \cdots + \frac{2}{f_3^{n_3 s}} + \cdots \text{ u. s. w.},$$

*) Wir machen darauf aufmerksam, dass diese Umformung auch auf die allgemeinere Reihe $\Sigma\, 2^\mu \psi(m)$ anwendbar ist, wenn nur die Function ψ für ganze Argumente der Bedingung $\psi(z)\,\psi(z') = \psi(zz')$ genügt (vergl. §. 124).

so erkennt man leicht mit Berücksichtigung der eben gemachten Bemerkung, dass das Product aller dieser Reihen nichts Anderes als die Summe

$$\Sigma \frac{2^\mu}{m^s}$$

ist. Denn das Product aus beliebigen Gliedern der ersten, zweiten, dritten Reihe u. s. f. hat die Form

$$\frac{2^\mu}{(f_1^{n_1} f_2^{n_2} f_3^{n_3} \dots)^s} = \frac{2^\mu}{m^s},$$

wo μ die Anzahl der wirklich in m aufgehenden Primzahlen f bedeutet, d. h. derjenigen, deren Exponent n von Null verschieden ist; es entsteht daher auf diese Weise wirklich jedes Glied der genannten Reihe, und jedes auch nur ein einziges Mal. Da nun andererseits

$$1 + \frac{2}{f^s} + \frac{2}{f^{2s}} + \frac{2}{f^{3s}} + \cdots + \frac{2}{f^{ns}} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{2}{f^s} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{f^s}} = \frac{1 + \frac{1}{f^s}}{1 - \frac{1}{f^s}}$$

ist, so erhalten wir folgende Gleichung

$$\Sigma \frac{2^\mu}{m^s} = \Pi \frac{1 + \frac{1}{f^s}}{1 - \frac{1}{f^s}},$$

in welcher das Productzeichen Π sich auf die sämmtlichen oben definirten Primzahlen f bezieht.

Bezeichnen wir mit q allgemein *jede positive nicht in* $2\,D$ *aufgehende Primzahl*, so leuchtet ein, dass man die vorstehende Gleichung auch in folgender Form schreiben kann:

$$\Sigma \frac{2^\mu}{m^s} = \Pi \frac{1 + \frac{1}{q^s}}{1 - \left(\frac{D}{q}\right) \frac{1}{q^s}};$$

denn so oft q nicht zu den Primzahlen f gehört, reducirt sich der entsprechende Factor des Productes auf $+1$. In der so erhaltenen

Gleichung multipliciren wir Zähler und Nenner des allgemeinen Factors zur Rechten mit $1-q^{-s}$, wodurch derselbe gleich

$$\frac{1-\frac{1}{q^{2s}}}{\left(1-\frac{1}{q^s}\right)\left(1-\left(\frac{D}{q}\right)\frac{1}{q^s}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{1-\frac{1}{q^s}}\right)\cdot\left(\frac{1}{1-\left(\frac{D}{q}\right)\frac{1}{q^s}}\right)}{\left(\frac{1}{1-\frac{1}{q^{2s}}}\right)}$$

wird, und indem wir das unendliche Product in drei unendliche Producte zerlegen, erhalten wir

$$\Sigma\frac{2^\mu}{m^s} = \frac{\Pi\frac{1}{1-\frac{1}{q^s}}\cdot\Pi\frac{1}{1-\left(\frac{D}{q}\right)\frac{1}{q^s}}}{\Pi\frac{1}{1-\frac{1}{q^{2s}}}}.$$

Jetzt können wir endlich jedes der drei rechts befindlichen Producte wieder in eine unendliche Reihe verwandeln. Da nämlich

$$\frac{1}{1-\left(\frac{D}{q}\right)\frac{1}{q^s}} = \Sigma\left(\frac{D}{q}\right)^r\frac{1}{q^{rs}} =$$

$$1+\left(\frac{D}{q}\right)\frac{1}{q^s}+\left(\frac{D}{q}\right)^2\frac{1}{q^{2s}}+\cdots+\left(\frac{D}{q}\right)^r\frac{1}{q^{rs}}+\cdots$$

ist, so wird, wenn man für q alle, nicht in $2D$ aufgehenden, Primzahlen

$$q_1,\ q_2,\ q_3\ \ldots$$

setzt, das Product aller dieser Factoren gleich der Summe aller Glieder von der Form

$$\left(\frac{D}{q_1}\right)^{r_1}\left(\frac{D}{q_2}\right)^{r_2}\left(\frac{D}{q_3}\right)^{r_3}\cdots\frac{1}{(q_1^{r_1}\,q_2^{r_2}\,q_3^{r_3}\ldots)^s},$$

wo die Exponenten $r_1, r_2, r_3 \ldots$ alle positiven ganzen Zahlen und Null zu durchlaufen haben. Das System aller der in den Nennern unter dem Exponenten s vorkommenden Zahlen

$$q_1^{r_1}\,q_2^{r_2}\,q_3^{r_3}\ldots = n$$

besteht offenbar aus sämmtlichen *positiven ganzen Zahlen n, welche relative Primzahlen gegen $2D$ sind*; jede solche Zahl n wird einmal und auch nur einmal durch ein bestimmtes System von Exponenten $r_1, r_2, r_3 \ldots$ erzeugt; gleichzeitig ist dann mit Benutzung der von *Jacobi* erweiterten Bedeutung des Legendre'schen Zeichens

$$\left(\frac{D}{q_1}\right)^{r_1}\left(\frac{D}{q_2}\right)^{r_2}\left(\frac{D}{q_3}\right)^{r_3}\cdots = \left(\frac{D}{q_1^{r_1}}\right)\left(\frac{D}{q_2^{r_2}}\right)\left(\frac{D}{q_3^{r_3}}\right)\cdots$$
$$= \left(\frac{D}{q_1^{r_1}\, q_2^{r_2}\, q_3^{r_3}\ldots}\right) = \left(\frac{D}{n}\right).$$

Hierdurch gewinnen wir also folgende Verwandlung

$$\Pi \frac{1}{1-\left(\frac{D}{q}\right)\frac{1}{q^s}} = \Sigma \left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^s},$$

wo das Summenzeichen rechts sich auf alle positiven Zahlen n bezieht, die relative Primzahlen gegen $2\,D$ sind.

Verfährt man ganz ebenso, indem man alle die Entwickelungen

$$\frac{1}{1-\frac{1}{q^s}} = 1 + \frac{1}{q^s} + \frac{1}{q^{2s}} + \cdots + \frac{1}{q^{rs}} + \cdots$$

mit einander multiplicirt, so erhält man offenbar

$$\Pi \frac{1}{1-\frac{1}{q^s}} = \Sigma \frac{1}{n^s}$$

und folglich auch

$$\Pi \frac{1}{1-\frac{1}{q^{2s}}} = \Sigma \frac{1}{n^{2s}}.$$

Hierdurch haben wir die wichtige Umformung

$$\Sigma \frac{2^\mu}{m^s} = \frac{\Sigma \frac{1}{n^s} \times \Sigma \left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^s}}{\Sigma \frac{1}{n^{2s}}}$$

gewonnen.

§. 90.

Wir multipliciren nun beide Seiten unserer Hauptgleichung (§. 88) mit der unendlichen Reihe

$$\sum \frac{1}{n^{2s}},$$

wodurch sie dem eben gewonnenen Resultat gemäss in die folgende übergeht:

$$\sum \frac{1}{n^{2s}} \times \sum \left(\frac{ax^2 + 2bxy + cy^2}{\sigma}\right)^{-s} + \cdots = \varkappa \sum \frac{1}{n^s} \times \sum \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^s}.$$

Führen wir in dem ersten Gliede links die Multiplication der beiden Summen aus, so kann das Resultat als die dreifach unendliche Reihe

$$\sum \left(\frac{an^2x^2 + 2bn^2xy + cn^2y^2}{\sigma}\right)^{-s}$$

geschrieben werden, in welcher für x, y alle den früheren Bedingungen I., II., III. genügenden Werthe (§. 88), und für n alle positiven relativen Primzahlen gegen $2D$ zu setzen sind. Diese Reihe kann man aber auch wieder als eine doppelt unendliche ansehen, wenn man

$$nx = x', \quad ny = y'$$

setzt; denn dann nimmt sie die Gestalt

$$\sum \left(\frac{ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2}{\sigma}\right)^{-s}$$

an, und es fragt sich nur, welche Bedingungen den neuen Summationsbuchstaben x', y' aufzuerlegen sind. Diese ergeben sich aus den Bedingungen für x, y, n folgendermassen. Erstens: Da x, y zufolge der Bedingung I. so gewählt werden müssen, dass

$$\frac{ax^2 + 2bxy + cy^2}{\sigma}$$

relative Primzahl gegen $2D$ wird, und da n ebenfalls relative Primzahl gegen $2D$ ist, so gilt dasselbe von

$$\frac{ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2}{\sigma} = n^2 \cdot \frac{ax^2 + 2bxy + cy^2}{\sigma}.$$

Zweitens: für den Fall einer positiven Determinante waren x, y den Isolirungsbedingungen II.

$$y \geqq 0, \quad ax + by > \frac{T}{U} y$$

zu unterwerfen; multiplicirt man dieselben mit n, so ergeben sich die ganz gleichlautenden Bedingungen

$$y' \geqq 0, \quad ax' + by' > \frac{T}{U} y'.$$

Drittens: aus der Bedingung, dass x, y relative Primzahlen sein sollen, würde jetzt nur noch folgen, dass der grösste gemeinschaftliche Divisor n von x', y' relative Primzahl gegen $2D$ sein muss; allein diese Bedingung kann man gänzlich fallen lassen, da sie schon in der ersten enthalten ist; denn sobald x', y' einen gemeinschaftlichen Divisor hätten, der nicht relative Primzahl gegen $2D$ wäre, so könnte auch

$$\frac{ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2}{\sigma}$$

nicht relative Primzahl gegen $2D$ sein.

Es zeigt sich also, dass die neuen Variabeln x', y' nur den beiden Bedingungen I. und II. zu unterwerfen sind, wenn man in denselben die Variabeln accentuirt, dass dagegen die Bedingung III. ganz fortgefallen ist. Umgekehrt überzeugt man sich leicht, dass ein jedes solches Werthenpaar x', y' einmal und nur einmal durch ein Werthenpaar x, y und eine Zahl n erzeugt wird.

Wir lassen nun der Bequemlichkeit halber die Accente der Variabeln wieder fort, und schreiben daher unsere Hauptgleichung in folgender Form *)

$$\Sigma \left(\frac{ax^2 + 2bxy + cy^2}{\sigma}\right)^{-s} + \cdots = \varkappa \, \Sigma \frac{1}{n^s} \times \Sigma \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^s},$$

wo nun in der ersten auf die Form (a, b, c) bezüglichen Hauptsumme die Summationsbuchstaben nur noch den beiden folgenden Bedingungen zu unterwerfen sind:

I. Der Werth $\dfrac{ax^2 + 2bxy + cy^2}{\sigma}$ soll relative Primzahl gegen $2D$ sein.

II. Im Fall einer positiven Determinante soll

$$y \geqq 0, \quad ax + by > \frac{T}{U} y$$

sein, wo T, U die frühere Bedeutung haben.

---

*) Auf dieselbe Weise kann auch die allgemeinere Gleichung abgeleitet werden, in welcher statt der Function z^{-s} irgend eine Function $\psi(z)$ auftritt, welche der Bedingung $\psi(z)\psi(z') = \psi(zz')$ genügt, so oft z und z' ganze Zahlen sind.

§. 91.

Bevor wir weitergehen, wollen wir aus unserer letzten Gleichung einige interessante Folgerungen ziehen: die erste derselben ist rein zahlentheoretischer Natur und vervollständigt unsere frühere Theorie der Darstellung. Wir multipliciren die beiden unendlichen Reihen

$$\Sigma \frac{1}{n'^s}, \quad \Sigma \left(\frac{D}{n''}\right) \frac{1}{n''^s}$$

rechter Hand, nachdem wir die Summationsbuchstaben, um sie von einander zu unterscheiden, accentuirt haben; dann erhalten wir als Product die doppelt unendliche Reihe

$$\Sigma \left(\frac{D}{n''}\right) \frac{1}{(n'n'')^s},$$

in welcher sowohl n' als auch n'' das Gebiet aller Zahlen n, d. h. aller derjenigen positiven ganzen Zahlen zu durchlaufen hat, welche relative Primzahlen gegen $2D$ sind. Offenbar ist jedes Product von der Form $n'n''$ wieder in demselben Gebiet enthalten; fassen wir daher alle Glieder der Doppelsumme, in welchen das Product $n'n''$ denselben Werth n hat, immer in ein einziges zusammen, so können wir diese Doppelsumme wieder in die Form einer einfach unendlichen Reihe

$$\Sigma \frac{\tau_n}{n^s}$$

bringen; bezeichnet man mit δ die sämmtlichen Divisoren der Zahl n, so wird offenbar

$$\tau_n = \Sigma \left(\frac{D}{\delta}\right).$$

Dividiren wir ferner die Gleichung auf beiden Seiten durch σ^s, so nimmt sie folgende Form an

$$\Sigma \frac{1}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^s} + \cdots = \Sigma \frac{\varkappa \tau_n}{(\sigma n)^s}.$$

Fassen wir nun auch links alle in den verschiedenen Doppelsummen vorkommenden Glieder, welche denselben Werth haben, in ein einziges zusammen, so erhalten wir folgende Gleichung

$$\Sigma \frac{\lambda_\nu}{\nu^s} = \Sigma \frac{\varkappa \tau_n}{(\sigma n)^s},$$

wo mit ν alle die durch die sämmtlichen Formen $(a, b, c) \ldots$ des Systems S darstellbaren Zahlen bezeichnet werden, und λ_ν die Anzahl der verschiedenen Darstellungen einer solchen Zahl ν bedeutet. Hierbei ist wohl zu bemerken, dass jetzt ebensowohl uneigentliche wie eigentliche Darstellungen zugelassen werden, indem die darstellenden Zahlen x, y nur noch den Bedingungen I. und II. des vorigen Paragraphen unterworfen sind, während sie früher auch relative Primzahlen unter einander sein mussten.

Besteht nun für jeden über einer gewissen Grenze liegenden positiven Werth des Exponenten s eine Gleichung von der Form

$$\frac{\alpha}{a^s} + \frac{\beta}{b^s} + \frac{\gamma}{c^s} + \cdots = \frac{\alpha'}{a'^s} + \frac{\beta'}{b'^s} + \frac{\gamma'}{c'^s} + \cdots$$

wo $a, b, c \ldots$ sowohl wie $a', b', c' \ldots$ positive und in ihrer Aufeinanderfolge wachsende Zahlwerthe bedeuten, und sind die sämmtlichen Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma \ldots \alpha', \beta', \gamma' \ldots$ von Null verschieden, so folgt hieraus die vollständige Identität beider Reihen, d. h. es ist

$$a = a', \quad b = b', \quad c = c' \ldots$$
$$\alpha = \alpha', \quad \beta = \beta', \quad \gamma = \gamma' \ldots$$

Um dies zu beweisen, können wir annehmen, es sei $a \leqq a'$; multipliciren wir beide Seiten der Gleichung mit a^s, so erhalten wir

$$\alpha + \beta\left(\frac{a}{b}\right)^s + \gamma\left(\frac{a}{c}\right)^s + \cdots$$
$$= \alpha'\left(\frac{a}{a'}\right)^s + \beta'\left(\frac{a}{b'}\right)^s + \gamma'\left(\frac{a}{c'}\right)^s + \cdots$$

Da nun sowohl die Werthe

$$\frac{a}{b}, \frac{a}{c} \cdots$$

als auch die Werthe

$$\frac{a}{b'}, \frac{a}{c'} \cdots$$

fortwährend abnehmende echte Brüche sind, und beide Reihen convergiren, so überzeugt man sich leicht*), dass mit unbegrenzt wachsendem s die linke Seite der vorstehenden Gleichung sich dem Grenzwerth α nähert, und ebenso die rechte dem Grenzwerth α' oder 0, je nachdem $a = a'$ oder $< a'$ ist. Da nun beide Seiten

---

*) Vergl. Supplement IX. §. 143.

sich nothwendig demselben Grenzwerth nähern müssen, und α von Null verschieden ist, so muss $a = a'$, und folglich auch $\alpha = \alpha'$ sein. Nachdem so die Identität der ersten Glieder auf beiden Seiten bewiesen ist, kann man dieselben fortlassen; aus der so entstehenden Gleichung

$$\frac{\beta}{b^s} + \frac{\gamma}{c^s} + \cdots = \frac{\beta'}{b'^s} + \frac{\gamma'}{c'^s} + \cdots$$

folgt dann auf dieselbe Weise, dass $b = b'$ und $\beta = \beta'$ sein muss, und so kann man fortfahren.

Wendet man dies Princip auf unsere obige Gleichung an, so ergiebt sich, dass jedes σn, dem ein von Null verschiedenes τ_n entspricht, nothwendig eine Zahl ν, d. h. eine durch die Formen S darstellbare Zahl, und dass die Anzahl λ_ν der verschiedenen Darstellungen eines solchen $\nu = \sigma n$ gleich $\varkappa \tau_n$ ist; wenn dagegen $\tau_n = 0$ ist, so kann auch σn keine durch die Formen S darstellbare Zahl ν sein; wir können daher in beiden Fällen sagen: *die Anzahl aller Darstellungen einer Zahl σn durch die Formen S ist immer*

$$= \varkappa \tau_n = \varkappa \sum \left(\frac{D}{\delta}\right),$$

wo δ alle Divisoren der Zahl σn durchlaufen muss).*

Wir wollen dieses Resultat auf einige Beispiele anwenden.

1. Ist $D = -1$ (und folglich $\sigma = 1$), so ist nur eine einzige Form in dem System S enthalten, für welche wir die Form $(1, 0, 1)$ wählen können; das System der Zahlen σn ist das der positiven ungeraden Zahlen, und da $\varkappa = 4$ ist, so erhalten wir das Resultat:

Die Anzahl aller Darstellungen einer beliebigen positiven ungeraden Zahl n durch die Form $(1, 0, 1) = x^2 + y^2$ *ist gleich*

$$4 \sum (-1)^{\frac{1}{2}(\delta - 1)} = 4(M - N)$$

d. h. gleich dem vierfachen Ueberschuss der Anzahl M ihrer Divisoren δ von der Form $4h + 1$ über die Anzahl N der Divisoren δ von der Form $4h + 3$.

Die darstellenden Zahlen x, y sind gar keiner Beschränkung unterworfen; es leuchtet ferner ein, dass jedesmal acht verschiedene Darstellungen eine einzige Zerlegung in zwei Quadrate geben; nur wenn eine der beiden darstellenden Zahlen $= 0$ ist, findet eine

*) Vergl. §. 124.

Ausnahme Statt, weil dann nur vier verschiedene Darstellungen dieselbe Zerlegung liefern, ein Fall, der nur dann eintreten kann, wenn n eine Quadratzahl ist. Die Anzahl der verschiedenen Zerlegungen ist daher $\frac{1}{2}(M - N + 1)$ oder $\frac{1}{2}(M - N)$, je nachdem n eine Quadratzahl ist oder nicht. So ist z. B.

$$\begin{aligned} 25 &= 0^2 + 5^2 = 3^2 + 4^2 \\ 45 &= 3^2 + 6^2 \\ 49 &= 0^2 + 7^2 \\ 65 &= 1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2. \end{aligned}$$

Ist endlich n eine Primzahl, so ergiebt sich wieder, dass n auf eine einzige, oder auf gar keine Weise in zwei Quadrate zerlegt werden kann, je nachdem n von der Form $4h + 1$, oder von der Form $4h + 3$ ist (§. 68).

2. Für die positive Determinante $D = 2$ existiren nur die beiden einander äquivalenten reducirten Formen $(1, 1, -1)$ und $(-1, 1, 1)$, also nur eine einzige Classe; als repräsentirende Form kann man daher auch $(1, 0, -2) = x^2 - 2y^2$ wählen. Da die kleinsten der Gleichung $t^2 - 2u^2 = 1$ genügenden Zahlen $T = 3$, $U = 2$ sind, so werden nur solche Darstellungen betrachtet, in welchen $y \geqq 0$, $2x > 3y$ ist. Da ferner

$$\left(\frac{2}{\delta}\right) = (-1)^{\frac{1}{8}(\delta^2 - 1)} = +1 \text{ oder } = -1$$

ist, je nachdem $\delta = 8h \pm 1$ oder $\delta = 8h \pm 5$ ist, so bekommen wir folgendes Resultat:

Die Anzahl aller den obigen Bedingungen genügenden Darstellungen (x, y) einer beliebigen positiven ungeraden Zahl n durch die Form $x^2 - 2y^2$ ist gleich dem Ueberschuss der Anzahl der Divisoren von n, welche die Form $8h \pm 1$ haben, über die Anzahl der anderen Divisoren.

§. 92.

Eine zweite interessante Anwendung der vorstehenden Untersuchung machen wir auf die Analysis. Wir haben gesehen, dass durch Einsetzen aller den Bedingungen I. und II. genügenden ganzzahligen Werthenpaare x, y in die Formen $(a, b, c) \ldots$ des Systems S die Zahlen σn erzeugt werden, und zwar ist

$$\varkappa\tau_n = \varkappa \sum \left(\frac{D}{\delta}\right)$$

die Anzahl der verschiedenen Erzeugungen einer solchen Zahl σn, wenn wieder für δ alle Divisoren von n gesetzt werden. Nehmen wir daher von jeder der Zahlen $ax^2 + 2bxy + cy^2$ eine bestimmte Function ψ, so entsteht auf diese Weise jeder Werth $\psi(\sigma n)$ so oft als $\varkappa\tau_n$ angiebt. Hieraus folgt wieder, dass

$$\sum \psi(ax^2 + 2bxy + cy^2) + \cdots = \varkappa \sum \tau_n \psi(\sigma n)$$

sein wird, sobald die Function ψ so gewählt wird, dass diese unendlichen Reihen bestimmte von der Anordnung ihrer Glieder unabhängige Summen haben. Dies ist der Fall, wenn man

$$\psi(z) = q^z$$

setzt, wo q eine reelle oder complexe Grösse bedeutet, deren Modulus ein echter Bruch ist. Man erhält auf diese Weise folgende sehr allgemeine Gleichung

$$\sum q^{ax^2+2bxy+cy^2} + \cdots = \varkappa \sum \tau_n q^{\sigma n};$$

da auf der rechten Seite der Coefficient τ_n selbst wieder eine Summe ist, in welcher δ die sämmtlichen Divisoren von n zu durchlaufen hat, so kann man, indem man n in $n'\delta$ verwandelt, die Gleichung auch so schreiben

$$\sum q^{ax^2+2bxy+cy^2} + \cdots = \varkappa \sum \left(\frac{D}{\delta}\right) q^{\sigma n'\delta},$$

wo nun rechts eine Doppelsumme steht, in welcher jeder der beiden Summationsbuchstaben n' und δ das Gebiet aller Zahlen n zu durchlaufen hat.

Wir wollen die vorstehende Gleichung auf einige specielle Fälle anwenden. Nehmen wir z. B. $D = -1$, also $\sigma = 1$, so haben wir links nur eine einzige Doppelsumme; nehmen wir wieder $(1, 0, 1)$ als die repräsentirende Form, so ist dieselbe gleich

$$\sum q^{x^2+y^2},$$

worin x, y alle Werthenpaare zu durchlaufen haben, für welche $x^2 + y^2$ ungerade ausfällt; es muss daher eine der beiden Zahlen x, y ungerade, die andere gerade sein; da man nun in jeder erlaubten Combination x mit y vertauschen kann, so setzen wir fest, dass x nur die ungeraden, y nur die geraden Werthe durchlaufen soll, müssen dann aber die so beschränkte Doppelreihe mit 2 multipliciren; wir erhalten so

$$2 \sum q^{x^2+y^2} = 2 \sum q^{x^2} q^{y^2} = 2 \sum q^{x^2} \times \sum q^{y^2}$$

wo x alle positiven und negativen ungeraden, y alle positiven und negativen geraden Zahlen und Null zu durchlaufen hat; beschränken wir aber x auf alle positiven ungeraden, und y auf alle positiven geraden Zahlen, so können wir das vorstehende Product auch so schreiben

$$4 \sum q^{x^2} \times (1 + 2 \sum q^{y^2}).$$

Auf der rechten Seite haben wir (nach §. 88) die Doppelsumme

$$4 \sum \left(\frac{-1}{\delta}\right) q^{n'\delta} = 4 \sum (-1)^{\frac{1}{2}(\delta-1)} q^{n'\delta},$$

wo n' und δ alle positiven ungeraden Zahlen zu durchlaufen haben; die Summation in Bezug auf n' lässt sich ausführen, indem

$$\sum q^{n'\delta} = q^\delta + q^{3\delta} + q^{5\delta} + \cdots = \frac{q^\delta}{1-q^{2\delta}}$$

ist; dadurch wird die rechte Seite gleich

$$4 \sum (-1)^{\frac{1}{2}(\delta-1)} \frac{q^\delta}{1-q^{2\delta}}$$

und wir erhalten daher folgende merkwürdige Gleichung

$$(q + q^9 + q^{25} + q^{49} + \cdots)(1 + 2q^4 + 2q^{16} + 2q^{36} + \cdots)$$
$$= \frac{q}{1-q^2} - \frac{q^3}{1-q^6} + \frac{q^5}{1-q^{10}} - \frac{q^7}{1-q^{14}} + \cdots$$

welche, wie die anderen Gleichungen, welche negativen Determinanten entsprechen, auch aus der Theorie der *Elliptischen Functionen* abgeleitet werden kann *).

Für positive Determinanten fallen die entsprechenden Gleichungen weniger einfach aus, weil auf der linken Seite die Variabeln x, y immer noch der Bedingung II. unterworfen sind. Nehmen wir z. B. $D = 2$, also $\sigma = 1$, $\varkappa = 1$, so erhalten wir in ähnlicher Weise die Gleichung

$$\sum q^{x^2-2y^2} = \sum \left(\frac{2}{\delta}\right) q^{\delta n'}$$
$$= \frac{q}{1-q^2} - \frac{q^3}{1-q^6} - \frac{q^5}{1-q^{10}} + \frac{q^7}{1-q^{14}} + \cdots,$$

wo auf der linken Seite für x, y alle Werthenpaare zu setzen sind,

---

*) Man vergleiche *Jacobi: Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum* 1829 pagg. 92, 103, 184.

die den Bedingungen $y \geqq 0$, $2x > 3y$ genügen, und für welche ausserdem $x^2 - 2y^2$ und also x ungerade ist.

§. 93.

Wir kehren nun zu unserem eigentlichen Gegenstande, der weitern Behandlung der Gleichung (§. 90)

$$\Sigma \left(\frac{ax^2 + 2bxy + cy^2}{\sigma}\right)^{-s} + \cdots = \varkappa \, \Sigma \frac{1}{n^s} \times \Sigma \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^s}$$

zurück, und es wird gut sein, den Gang der Untersuchung hier mit wenigen Worten im Voraus anzugeben. Man würde auf unübersteigliche Schwierigkeiten stossen, wenn man die auf der linken Seite angedeuteten Summationen für einen beliebigen Werth von $s > 1$ wirklich ausführen wollte. Lässt man dagegen den Exponenten s immer mehr abnehmen und gegen den Werth 1 convergiren, so wird gleichzeitig jede dieser Hauptsummen über alle Grenzen wachsen, und bei näherer Betrachtung zeigt sich, dass das Product aus einer solchen Hauptsumme und aus $(s - 1)$ sich einem festen endlichen Grenzwerth L nähert, welcher nur von der allen Formen gemeinschaftlichen Determinante D abhängt, und folglich wird der Grenzwerth der ganzen mit $(s - 1)$ multiplicirten linken Seite $= hL$ sein, wenn man mit h die Anzahl der Hauptsummen, d. h. also die Anzahl der in dem Formensystem S enthaltenen Formen $(a, b, c) \ldots$ bezeichnet. Da ferner der Grenzwerth der mit $(s - 1)$ multiplicirten rechten Seite sich direct bestimmen lässt, so erhält man auf diese Weise einen Ausdruck für die Classenanzahl h, deren Bestimmung ja den Gegenstand unserer ganzen Untersuchung bildet.

Bevor wir aber dazu übergehen, diesen Grenzprocess durchzuführen, müssen wir noch einige vorläufige Fragen erörtern, deren Beantwortung für unsern Zweck durchaus erforderlich ist. Zunächst wenden wir uns dazu, die den Summationsbuchstaben x, y auferlegte Bedingung I. (§. 90) so umzuformen, dass man einen deutlichen Ueberblick über das System der ihr genügenden Werthenpaare x, y erhält. Zu dem Ende dürfen wir annehmen, dass der Repräsentant (a, b, c) einer ganzen Classe immer so gewählt ist, dass der Quotient $a : \sigma$ nicht nur, wie schon früher festgesetzt wurde, positiv, sondern auch *relative Primzahl gegen* $2D$ ist. Von der Berechtigung zu dieser Annahme wird man sich durch die folgende Betrachtung überzeugen. Ist

$$(a, b, c) = \sigma(Ax^2 + Bxy + Cy^2) = \sigma F$$

eine beliebige Form vom Theiler σ, und r irgend eine Primzahl, so kann man den beiden Variabeln x, y der Form stets solche Werthe beilegen, dass der Werth von F nicht durch r theilbar wird; denn ist eine der beiden Zahlen A, C, z. B. A, nicht durch r theilbar, so gebe man x einen durch r nicht theilbaren, y dagegen einen durch r theilbaren Werth; sind aber beide Coefficienten A, C durch r theilbar, so ist B gewiss nicht durch r theilbar, und folglich genügt es dann, x und y Werthe beizulegen, die beide nicht durch r theilbar sind. *Man kann folglich auch x und y immer so wählen, dass der Werth von F relative Primzahl gegen irgend eine vorgeschriebene Zahl k wird*; denn bezeichnet man mit $r', r'', r''' \ldots$ die sämmtlichen in k aufgehenden Primzahlen, so braucht man nur zu bewirken, dass F durch keine einzige derselben theilbar wird, was nach dem eben Gesagten sich stets dadurch erreichen lässt, dass die beiden Variabeln x, y durch einige dieser Primzahlen theilbar, durch andere nicht theilbar angenommen werden — Bedingungen, die sich stets auf unendlich viele verschiedene Arten erfüllen lassen. Man kann hinzufügen, dass x, y ausserdem noch so gewählt werden können, dass der Werth von F *positiv* ausfällt; für eine negative Determinante D versteht sich dies von selbst, da wir Formen mit negativen äusseren Coefficienten ausschliessen; für eine positive Determinante braucht man, da

$$a\sigma F = (ax + by)^2 - Dy^2$$

ist, nur dafür zu sorgen, dass, je nachdem a positiv oder negativ ist, entsprechend $(ax + by)$ absolut genommen grösser oder kleiner als $y\sqrt{D}$ ausfällt, und offenbar lassen die bisher den Variabeln x, y auferlegten Bedingungen, durch einige Primzahlen theilbar, durch einige andere nicht theilbar zu sein, noch solchen Spielraum für ihr Grössenverhältniss, dass auch dieser Forderung noch auf unendlich viele verschiedene Arten genügt werden kann. Endlich können wir noch behaupten, dass für die Variabeln x, y auch solche Werthe gewählt werden können, welche unter einander *relative Primzahlen* sind und doch die übrigen Bedingungen erfüllen, dass F positiv und relative Primzahl gegen die vorgeschriebene Zahl k ist; denn haben x und y einen gemeinschaftlichen Divisor, so braucht man sie nur durch Division von demselben zu befreien, und die Quotienten, die unter einander relative Primzahlen sind, bilden ein solches allen Anforderungen genügendes Werthenpaar.

Wir machen von der vorstehenden (auch für andere Untersuchungen nützlichen) Betrachtung eine specielle Anwendung auf den Fall, in welchem $k = 2D$ ist; wir können dann so sagen: ist (a, b, c) irgend eine Form vom Theiler σ und von der Determinante D, so kann man stets zwei relative Primzahlen α, γ von der Beschaffenheit finden, dass

$$\frac{a'}{\sigma} = \frac{a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2}{\sigma}$$

positiv und relative Primzahl gegen $2D$ wird. Da nun α, γ relative Primzahlen sind, so kann man (§. 24) irgend ein Paar von Werthen β, δ wählen, welche der Gleichung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ genügen, und dann geht die Form (a, b, c) durch die Substitution $\binom{\alpha,\ \beta}{\gamma,\ \delta}$ in eine äquivalente Form über, deren erster Coefficient a' positiv ist und ausserdem die Eigenschaft hat, dass $a' : \sigma$ relative Primzahl gegen $2D$ ist. Und hiermit ist in der That der verlangte Nachweis geliefert, dass in jeder Formenclasse solche Repräsentanten ausgewählt werden können, welche die obige neue Bedingung erfüllen.

§. 94.

Wir nehmen daher jetzt an, dass die repräsentirende Form (a, b, c) so gewählt ist, dass $a:\sigma$ nicht nur positiv, sondern auch relative Primzahl gegen $2D$ ist, und fragen nun nach dem System aller Werthenpaare x, y, welche der Bedingung I. genügen, dass

$$\frac{ax^2 + 2bxy + cy^2}{\sigma}$$

relative Primzahl gegen $2D$ wird*). Bezeichnen wir wie früher mit Δ den absoluten Werth der Determinante D, so kann man stets

$$x = 2\Delta v + \alpha, \quad y = 2\Delta w + \gamma$$

setzen, wo α und γ irgend welche der 2Δ Zahlen

$$0, 1, 2, \ldots (2\Delta - 1),$$

*) Ganz ähnlich lässt sich auch der Fall behandeln, wenn (a, b, c) keine *ursprüngliche* Form ist; man kann dann gleich darauf ausgehen, die Anzahl der Classen von *beliebigem* Theiler σ zu bestimmen, und erhält auf diese Weise ebenfalls das unten (in §. 100) gewonnene Resultat.

und v und w beliebige ganze reelle Zahlen bedeuten; jede Combination zweier ganzen Zahlen x, y kann stets nur auf eine einzige Weise in diese Form gebracht werden. Da nun aus

$$x \equiv \alpha \pmod{2\Delta} \quad \text{und} \quad y \equiv \gamma \pmod{2\Delta}$$

auch

$$\frac{ax^2 + 2bxy + cy^2}{\sigma} \equiv \frac{a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2}{\sigma} \pmod{2\Delta}$$

folgt, so leuchtet ein, dass man unter den sämmtlichen $4\Delta^2$ Combinationen (α, γ) nur diejenigen zu ermitteln hat, für welche

$$\frac{a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2}{\sigma}$$

relative Primzahl gegen 2Δ wird. Die gesuchten Combinationen (x, y) vertheilen sich dann in zusammengehörige Paare von arithmetischen Reihen, deren Differenz $= 2\Delta$ ist, und deren Anfangsglieder α, γ specielle solche Combinationen sind, die dieselbe Bedingung erfüllen. Uns kommt es nun weniger darauf an, wirklich alle diese Combinationen (α, γ) genau zu definiren, als vielmehr, nur ihre *Anzahl* sicher festzustellen, weil diese allein bei dem spätern Grenzübergang eine Rolle spielt. Hierzu ist es aber nöthig verschiedene Fälle zu unterscheiden.

Erstens: $\sigma = 1$. Wir fragen nach der Anzahl der Combinationen (α, γ), für welche $a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2$ oder, da a relative Primzahl gegen 2Δ ist, für welche

$$a(a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2) = (a\alpha + b\gamma)^2 \pm \Delta\gamma^2$$

relative Primzahl gegen 2Δ wird. Setzt man zunächst für γ irgend eine der Δ geraden Zahlen

$$0, 2, 4 \ldots (2\Delta - 2),$$

so ist erforderlich und hinreichend, dass $(a\alpha + b\gamma)^2$ und folglich $(a\alpha + b\gamma)$ relative Primzahl gegen 2Δ werde; lässt man aber α das in Bezug auf den Modulus 2Δ vollständige Restsystem

$$0, 1, 2 \ldots (2\Delta - 1)$$

durchlaufen, während γ seinen Werth behält, so durchläuft (nach §. 18) der Ausdruck $(a\alpha + b\gamma)$, weil a relative Primzahl gegen den Modulus ist, ebenfalls ein vollständiges Restsystem, und folglich gehören zu jedem solchen geraden γ genau $\varphi(2\Delta)$ erlaubte Werthe von α, wo die Charakteristik φ im frühern Sinne (§. 11) gebraucht ist. Jedem der Δ ungeraden Werthe

$$1, 3 \ldots (2\Delta - 1)$$

von γ entsprechen ebenfalls $\varphi(2\varDelta)$ erlaubte Werthe von α; dies leuchtet unmittelbar ein, wenn $\varDelta$ gerade ist, weil die Forderung sich dann ebenfalls darauf reducirt, dass $(a\alpha + b\gamma)$ relative Primzahl gegen $2\varDelta$ werden muss. Ist aber $\varDelta$ und also auch $\pm \varDelta\gamma^2$ ungerade, so muss, da

$$(a\alpha + b\gamma)^2 \pm \varDelta\gamma^2$$

ungerade und relative Primzahl gegen $\varDelta$ werden soll, $(a\alpha + b\gamma)$ gerade und relative Primzahl gegen $\varDelta$ werden, und folglich muss auch der Rest von $(a\alpha + b\gamma)$ in Bezug auf den Modul $2\varDelta$ gerade und relative Primzahl gegen $\varDelta$ sein, und umgekehrt wird, sobald dies der Fall ist, die obige Forderung erfüllt sein. Durchläuft nun α alle seine $2\varDelta$ Werthe, so durchläuft der Rest von $(a\alpha + b\gamma)$ dieselben $2\varDelta$ Werthe; unter diesen sind die folgenden $\varDelta$ Reste gerade

$$0,\ 2,\ 4 \ldots 2(\varDelta - 1),$$

und unter diesen sind $\varphi(\varDelta)$ relative Primzahlen gegen die ungerade Zahl $\varDelta$. Dies ist also die Anzahl der zu jedem ungeraden γ gehörenden erlaubten Werthe von α; da nun aber $\varDelta$ ungerade, also relative Primzahl gegen 2 ist, so ist auch $\varphi(2\varDelta) = \varphi(2)\,\varphi(\varDelta) = \varphi(\varDelta)$, und folglich haben wir in allen Fällen dieselbe Antwort: zu jedem geraden oder ungeraden γ gehören stets $\varphi(2\varDelta)$ erlaubte Werthe von α; mithin existiren im Ganzen $2\varDelta\,\varphi(2\varDelta)$ erlaubte Combinationen (α, γ).

Zweitens: $\sigma = 2$; a und c gerade, b ungerade, und $D \equiv 1 \pmod{4}$. Es fragt sich: für wieviele Combinationen (α, γ) ist

$$\tfrac{1}{2}a\alpha^2 + b\alpha\gamma + \tfrac{1}{2}c\gamma^2$$

ungerade und relative Primzahl gegen $\varDelta$? — Wir beschränken uns zunächst darauf, die Combinationen zu bestimmen, für welche dieser Werth ungerade ausfällt. Da wir den Repräsentanten (a, b, c) so gewählt haben, dass $\frac{1}{2}a$ relative Primzahl gegen $2\varDelta$ und also auch ungerade ist, so wird

$$D = b^2 - ac \equiv 1 \quad \text{oder} \quad \equiv 5 \pmod{8},$$

je nachdem $\frac{1}{2}c$ gerade oder ungerade ist; im ersten Fall muss daher $\alpha(\frac{1}{2}a\alpha + b\gamma)$ ungerade, also α ungerade, und γ gerade sein; im zweiten Fall muss mindestens eine der beiden Zahlen α und γ ungerade sein. Die Anzahl der erlaubten Combinationen ist hierdurch im ersten Falle auf $\varDelta^2$, im zweiten auf $3\varDelta^2$ herabgedrückt.

Soll nun der Werth von $\frac{1}{2}a\alpha^2 + b\alpha\gamma + \frac{1}{2}c\gamma^2$ auch relative Primzahl gegen $\varDelta$ werden, so ist erforderlich und hinreichend, dass

$$(a\alpha + b\gamma)^2 \pm \varDelta\gamma^2 = 2a(\tfrac{1}{2}a\alpha^2 + b\alpha\gamma + \tfrac{1}{2}c\alpha^2)$$

oder also $(a\alpha + b\gamma)$ relative Primzahl gegen $\varDelta$ werde. Im ersten Fall, wo $D \equiv 1 \pmod{8}$ ist, dürfen für γ nur gerade, für α nur ungerade Werthe gesetzt werden. Giebt man daher γ einen bestimmten der $\varDelta$ Werthe

$$0,\ 2,\ 4 \ldots (2\varDelta - 2)$$

und lässt dann α die sämmtlichen $\varDelta$ Werthe

$$1,\ 3,\ 5 \ldots (2\varDelta - 1)$$

durchlaufen, welche offenbar in Bezug auf den Modul $\varDelta$ ein vollständiges Restsystem bilden, so gilt (da a relative Primzahl gegen $\varDelta$ ist) dasselbe von den $\varDelta$ entsprechenden Zahlen $(a\alpha + b\gamma)$, und folglich sind unter denselben $\varphi(\varDelta) = \varphi(2\varDelta)$ relative Primzahlen gegen $\varDelta$. Im Ganzen giebt es daher in diesem Fall $\varDelta\varphi(2\varDelta)$ erlaubte Combinationen (α, γ). — Im zweiten Fall, wo $D \equiv 5 \pmod{8}$ ist, und in welchem mindestens eine der beiden Zahlen α, γ ungerade sein muss, findet man auf dieselbe Weise, dass jedem geraden Werthe von γ wieder $\varphi(\varDelta) = \varphi(2\varDelta)$ ungerade Werthe von α entsprechen, woraus zunächst $\varDelta\varphi(2\varDelta)$ zulässige Combinationen entspringen; ist aber γ ungerade, und durchläuft α seine sämmtlichen $2\varDelta$ Werthe, so durchläuft der Ausdruck $(a\alpha + b\gamma)$ zweimal dasselbe vollständige Restsystem in Bezug auf den Modulus $\varDelta$; es giebt daher immer $2\varphi(\varDelta) = 2\varphi(2\varDelta)$ erlaubte Werthe von α, so dass aus den $\varDelta$ ungeraden Werthen von γ genau $2\varDelta\varphi(2\varDelta)$ erlaubte Combinationen (α, γ) entspringen. Im Ganzen giebt es daher in diesem zweiten Falle $3\varDelta\varphi(2\varDelta)$ erlaubte Combinationen (α, γ).

Wir können die sämmtlichen Fälle so zusammenfassen: die Anzahl der Paare von zusammengehörigen arithmetischen Reihen

$$x = 2\varDelta v + \alpha, \quad y = 2\varDelta w + \gamma$$

welche der Bedingung I. genügen, ist

$$= \omega . \varDelta\varphi(2\varDelta),$$

wo

$$\omega = 2, \text{ wenn } \sigma = 1$$

$$\omega = 1, \text{ wenn } \sigma = 2 \text{ und } D \equiv 1 \pmod{8}$$

$$\omega = 3, \text{ wenn } \sigma = 2 \text{ und } D \equiv 5 \pmod{8}$$

ist.

§. 95.

Wir kehren nun zu unserer Hauptgleichung zurück, der wir die Form

$$\varrho \sum \frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^{1+\varrho}} + \cdots = \frac{\varrho \varkappa}{\sigma^{1+\varrho}} \sum \frac{1}{n^{1+\varrho}} \sum \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^{1+\varrho}}$$

geben, indem wir $s = 1 + \varrho$ setzen, mit ϱ multipliciren und durch $\sigma^{1+\varrho}$ dividiren; lassen wir jetzt die positive Zahl ϱ unendlich klein werden, so haben wir die Grenzwerthe der einzelnen Glieder zu bestimmen, welche sich auf der linken und rechten Seite befinden. Indem wir mit der Discussion der linken Seite beginnen, wird es wieder nothwendig, den Fall einer negativen Determinante von dem einer positiven vollständig zu trennen.

Wir nehmen daher zunächst an, die Determinante D sei *negativ* $= -\Delta$. Dann sind die Variabeln x, y in der der Form (a, b, c) entsprechenden Hauptsumme nur der Bedingung I. unterworfen, und wir haben eben gesehen, dass eine solche Hauptsumme in $\omega \Delta \varphi(2\Delta)$ Partialreihen zerfällt, welche den einzelnen zulässigen Combinationen (α, γ) entsprechen. Betrachten wir daher zunächst nur eine einzige solche Partialsumme

$$\varrho \sum \frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^{1+\varrho}},$$

in welcher x, y alle Werthe

$$x = 2\Delta v + \alpha, \quad y = 2\Delta w + \gamma$$

zu durchlaufen haben, die einer bestimmten zulässigen Combination (α, γ) und allen denkbaren ganzzahligen Werthen v, w entsprechen. Nach den in den Supplementen (II. §. 118) aufgestellten Principien ist der Grenzwerth des vorstehenden Productes identisch mit dem des Quotienten $T:t$, wo t eine über alle Grenzen wachsende positive Zahl, und T die zugehörige Anzahl der dargestellten Zahlen $ax^2 + 2bxy + cy^2$ bedeutet, welche nicht grösser als t sind, für welche also

$$a\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)^2 + 2b\frac{x}{\sqrt{t}} \cdot \frac{y}{\sqrt{t}} + c\left(\frac{y}{\sqrt{t}}\right)^2 \leqq 1$$

ist. Dieser Grenzwerth des Quotienten $T:t$ lässt sich leicht mit

Hülfe einer geometrischen Betrachtung bestimmen; setzt man nämlich

$$\frac{x}{\sqrt{t}} = \xi, \quad \frac{y}{\sqrt{t}} = \eta,$$

so ist T die Anzahl der Werthenpaare

$$\xi = \frac{2\Delta}{\sqrt{t}}v + \frac{\alpha}{\sqrt{t}}, \quad \eta = \frac{2\Delta}{\sqrt{t}}w + \frac{\gamma}{\sqrt{t}}, \tag{1}$$

für welche

$$a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 \leqq 1 \tag{2}$$

wird; sieht man nun ξ, η als rechtwinklige Coordinaten eines Punctes in einer Ebene an, und lässt man v und w alle ganzzahligen Werthe durchlaufen, so bilden die durch die Formeln (1) bestimmten Puncte (ξ, η) ein Gitter, welches durch die rechtwinklige Kreuzung zweier Systeme von Geraden entsteht, die den Axen parallel sind, und von denen je zwei benachbarte die constante Distanz $\delta = 2\Delta : \sqrt{t}$ haben. Die ganze Ebene wird auf diese Weise in Quadrate von dem Flächeninhalt

$$\delta^2 = \frac{4\Delta^2}{t}$$

zerlegt, deren Eckpuncte jene Puncte (ξ, η) sind; und folglich ist T die Anzahl derjenigen dieser Gitterpuncte (ξ, η), welche nicht ausserhalb der durch die Gleichung

$$a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 = 1 \tag{3}$$

dargestellten Curve liegen; da nun $b^2 - ac = -\Delta$ negativ (und a positiv) ist, so ist diese Curve eine Ellipse, deren Mittelpunct mit dem Nullpunct des Coordinatensystems zusammenfällt. Nach einem ebenfalls in den Supplementen (III. §. 120) aufgestellten Hülfssatz hat folglich das Product

$$T.\delta^2 = 4\Delta^2 . \frac{T}{t}$$

den Flächeninhalt A dieser Ellipse zum Grenzwerth, wenn t unendlich gross und also δ unendlich klein wird; es ist daher der gesuchte Grenzwerth

$$\lim \frac{T}{t} = \frac{A}{4\Delta^2},$$

woraus schon folgt, dass derselbe von (α, γ) unabhängig und also für jede der $\omega\Delta\varphi(2\Delta)$ Partialsummen, welche unsere Hauptsumme constituiren, derselbe ist. Mithin ist der Grenzwerth dieser der Form (a, b, c) entsprechenden Hauptsumme

$$\varrho\,\Sigma\,\frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^{1+\varrho}}$$

gleich

$$\omega\varDelta\varphi(2\varDelta)\,.\,\frac{A}{4\varDelta^2}=\frac{\omega\varphi(2\varDelta)}{4\varDelta}\,A,$$

wo A den Flächeninhalt der Ellipse (3) bezeichnet*). Um diesen zu bestimmen, transformire man die Gleichung der Ellipse durch Einführung solcher rechtwinkliger Coordinaten, welche mit den Hauptaxen der Ellipse zusammenfallen, wodurch sie die Form

$$a'\xi'^2+c'\eta'^2=1$$

annehmen wird. Bekanntlich bleibt bei einer solchen orthogonalen Transformation die Determinante b^2-ac ungeändert, so dass

$$a'c'=ac-b^2=\varDelta$$

ist; andererseits sind $\sqrt{a'}$ und $\sqrt{c'}$ die reciproken Werthe der beiden Halbaxen, und folglich ist

$$A=\frac{\pi}{\sqrt{a'c'}}=\frac{\pi}{\sqrt{\varDelta}},$$

wo natürlich die Quadratwurzel *positiv* zu nehmen ist. Es ergiebt sich also das merkwürdige Resultat, dass dieser Flächeninhalt A, und folglich auch der obige Grenzwerth

$$\frac{\omega\pi\varphi(2\varDelta)}{4\varDelta\sqrt{\varDelta}}$$

der auf die eine Form (a, b, c) bezüglichen Hauptsumme von den einzelnen Coefficienten a, b, c und folglich von der individuellen Natur dieser Form gänzlich unabhängig ist. Denselben Grenzwerth wird daher jede andere, einer andern Form (a', b', c') des Systems S entsprechende, Hauptsumme haben; bezeichnen wir daher mit h die Anzahl dieser einzelnen Hauptsummen auf der linken Seite unserer Gleichung, d. h. also die *Anzahl der Classen nicht äquivalenter ursprünglicher Formen der σten Art für die negative De-*

*) Daraus, dass der Quotient $T : t$ sich einem bestimmten Grenzwerth nähert, geht zufolge des in den Supplementen (II. §. 118) aufgestellten Satzes nachträglich hervor, dass die bisher betrachteten unendlichen Reihen für jeden positiven Werth von ϱ, also für alle Werthe $s > 1$ convergiren.

terminante $D = -\Delta$, so wird der Grenzwerth der ganzen linken Seite gleich

$$\frac{\omega \pi \varphi(2\Delta)}{4\Delta\sqrt{\Delta}} h.$$

§. 96.

Gehen wir nun zur rechten Seite der Gleichung über, so haben wir wieder mit Hülfe der in den Supplementen (II. §. 117) aufge- ˈˡlten Principien den Grenzwerth des Productes

$$\varrho \sum \frac{1}{n^{1+\varrho}}$$

zu ermitteln, wo das Summenzeichen sich auf alle positiven ganzen Zahlen n bezieht, die relative Primzahlen gegen 2Δ sind. Bezeichnet man nun mit $\nu, \nu', \nu'' \ldots$ die $\varphi(2\Delta)$ ersten dieser Zahlen, nämlich diejenigen, welche $< 2\Delta$ sind, so kann man die vorstehende Summe in $\varphi(2\Delta)$ Partialsummen von der Form

$$\varrho \left\{ \frac{1}{\nu^{1+\varrho}} + \frac{1}{(\nu + 2\Delta)^{1+\varrho}} + \frac{1}{(\nu + 4\Delta)^{1+\varrho}} + \frac{1}{(\nu + 6\Delta)^{1+\varrho}} + \cdots \right\}$$

zerlegen, in welcher die unter dem Exponenten $(1 + \varrho)$ stehenden Zahlen jedesmal eine arithmetische Reihe von der Differenz 2Δ bilden; da nun nach dem in den Supplementen behandelten speciellen Fall der Grenzwerth einer solchen Partialreihe

$$= \frac{1}{2\Delta}$$

und also unabhängig von ν ist, so wird der Grenzwerth der ganzen Summe

$$= \frac{\varphi(2\Delta)}{2\Delta},$$

und mithin wird der Grenzwerth der ganzen rechten Seite der Hauptgleichung

$$\frac{\varkappa \varphi(2\Delta)}{\sigma . 2\Delta} \lim \sum \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^{1+\varrho}}.$$

Da aber beide Seiten für jeden Werth von $s > 1$, d. h. für jeden positiven Werth von ϱ identisch sind, und da sie folglich, wenn überhaupt einen, nothwendig denselben Grenzwerth haben müssen, so ergiebt sich aus der Vergleichung, indem wir $D = -\Delta$ restituiren,

$$h = \frac{2\varkappa}{\sigma\omega\pi}\sqrt{-D} \, . \lim \Sigma \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^{1+\varrho}}$$

als Ausdruck für die Classenanzahl der ursprünglichen Formen σter Art (mit positiven äusseren Coefficienten) für eine *negative* Determinante D; hierin ist ferner (nach §. 88)

$\varkappa = 4$, wenn $D = -1$,
$\varkappa = 6$, wenn $D = -3$ und $\sigma = 2$,
$\varkappa = 2$ in den übrigen Fällen;

und (nach §. 94)

$\omega = 2$, wenn $\sigma = 1$,
$\omega = 1$, wenn $\sigma = 2$ und $D \equiv 1 \pmod{8}$,
$\omega = 3$, wenn $\sigma = 2$ und $D \equiv 5 \pmod{8}$.

§. 97.

Für Formen der ersten Art erhalten wir daher, indem wir $\sigma = 1$, $\varkappa = 2$ und $\omega = 2$ setzen,

$$h = \frac{2}{\pi}\sqrt{-D} \, . \lim \Sigma \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^{1+\varrho}},$$

mit Ausnahme des einzigen Falles $D = -1$, in welchem $\varkappa$ nicht $= 2$, sondern $= 4$ ist, und folglich

$$h = \frac{4}{\pi} \lim \Sigma \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}}{n^{1+\varrho}}$$

wird; es wird später (§. 101) allgemein gezeigt werden, dass

$$\lim \Sigma \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^{1+\varrho}} = \Sigma \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n}$$

ist, vorausgesetzt, dass auf der rechten Seite die Glieder ihrer Grösse nach geordnet werden; in dem speciellen Fall $D = -1$ wird daher

$$h = \frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right) = 1,$$

da der Werth der in der Parenthese befindlichen unendlichen Reihe von *Leibnitz* bekanntlich $= \frac{1}{4}\pi$ ist; hierin liegt also eine Bestätigung unserer Principien, da in der That für die Determinante $D = -1$ nur eine einzige Classe von Formen (mit positiven äusseren Coefficienten) existirt.

Wir wollen nun mit der vorstehenden Formel für die Classenanzahl h der Formen der ersten Art die für die Anzahl h' der Formen der zweiten Art vergleichen. Wir unterscheiden zu dem Zweck die beiden Fälle, in welchen $D \equiv 1$ oder $D \equiv 5 \pmod{8}$ ist. Im ersten Fall ist $\varkappa = 2$ und $\omega = 1$, folglich

$$h' = \frac{2}{\pi}\sqrt{-D} \,.\, \lim \Sigma\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^{1+\varrho}} = h;$$

im zweiten Fall dagegen ist $\omega = 3$ und $\varkappa = 2$, also

$$h' = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{\pi}\sqrt{-D} \,.\, \lim \Sigma\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^{1+\varrho}} = \frac{1}{3}h,$$

ausgenommen den einzigen Fall $D = -3$, in welchem $\varkappa$ nicht $= 2$, sondern $= 6$, und folglich wieder

$$h' = h$$

ist. Wir können daher so zusammenfassen: es ist

$h' = h$, wenn $D \equiv 1 \pmod{8}$, und für $D = -3$;
$h' = \frac{1}{3}h$, wenn $D \equiv 5 \pmod{8}$, ausgenommen $D = -3$.

Diese Beziehungen zwischen der Anzahl der Formen der ersten und der zweiten Art hat schon *Gauss* gefunden, aber auf einem ganz andern Wege*).

§. 98.

Wir haben nun dieselbe Untersuchung für den Fall einer *positiven* Determinante $D = \Delta$ zu wiederholen. Betrachten wir zunächst die linke Seite, so zerlegen wir wieder jede auf eine bestimmte Form (a, b, c) bezügliche Hauptsumme in $\omega\Delta\varphi(2\Delta)$ Partialsummen von der Form

$$\varrho\Sigma\frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^{1+\varrho}},$$

in deren jeder die Summationsbuchstaben alle Werthenpaare

$$x = 2\Delta v + \alpha,\quad y = 2\Delta w + \gamma \tag{1}$$

zu durchlaufen haben, die einer bestimmten Combination (α, γ)

*) **D. A. art. 256. VI. — Vergl. §. 151, I.**

und allen ganzzahligen Werthen v, w entsprechen; jetzt aber treten ausserdem noch die Isolirungsbedingungen II. hinzu, denen gemäss

$$y \geqq 0, \quad ax + by > \frac{T}{U} y \tag{2}$$

sein soll. Diese letzteren Bedingungen haben, wie wir schon früher gesehen haben (§. 87), zur Folge, dass

$$ax + (b + \sqrt{D})y, \quad ax + (b - \sqrt{D})y,$$

und also auch

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

positive Zahlen sind, und wir können daher wieder die in den Supplementen aufgestellten Principien anwenden; bezeichnen wir mit t einen beliebigen positiven Werth und mit τ die Anzahl derjenigen in den Reihen (1) enthaltenen und zugleich den Bedingungen (2) genügenden Werthenpaare x, y, für welche

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 \leqq t \tag{3}$$

ist, so haben wir nur den Grenzwerth des Quotienten $\tau : t$ für unbegrenzt wachsende Werthe von t zu bestimmen, um dadurch zugleich den Grenzwerth der obigen Partialsumme zu finden, welche der einen Combination (α, γ) entspricht. Setzen wir wieder (indem wir $\sqrt{t}$ positiv nehmen)

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{t}}, \quad \eta = \frac{y}{\sqrt{t}},$$

und sehen wir ξ, η als rechtwinklige Coordinaten eines Punctes einer Ebene an, so ist τ die Anzahl derjenigen in der Doppelreihe

$$\xi = \frac{2\Delta}{\sqrt{t}} v + \frac{\alpha}{\sqrt{t}}, \quad \eta = \frac{2\Delta}{\sqrt{t}} w + \frac{\gamma}{\sqrt{t}}$$

enthaltenen Gitterpuncte, welche den drei Ungleichheiten

$$\eta \geqq 0, \quad a\xi + b\eta > \frac{T}{U}\eta,$$

$$a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 \leqq 1$$

Genüge leisten, d. h. welche innerhalb eines Stückes der $\xi\eta$-Ebene liegen, das zum Theil durch die Axe der ξ, zum Theil durch eine durch den Nullpunct gehende Gerade, und endlich durch eine Hyperbel begrenzt wird, die den Nullpunct zum Mittelpuncte hat. Bezeichnen wir mit B den Flächeninhalt dieses Stückes der $\xi\eta$-Ebene, so wird nach den in den Supplementen aufgestellten Principien, wenn t unendlich gross, und also die Kante $\delta = 2\Delta : \sqrt{t}$ der Gitterquadrate unendlich klein wird,

$$\lim \tau . \delta^2 = 4\Delta^2 . \lim \frac{\tau}{t} = B,$$

also

$$\lim \frac{\tau}{t} = \frac{B}{4\Delta^2}$$

sein. Da dieser Grenzwerth zugleich der Grenzwerth der Partialsumme ist, welche sich auf die eine Combination (α, γ) bezieht, so wird, da hierin die Werthe α, γ ganz herausgefallen sind, jede der $\omega \Delta \varphi(2\Delta)$ Partialsummen, welche den verschiedenen Combinationen (α, γ) entsprechen, und welche zusammen die auf die Form (a, b, c) bezügliche Hauptsumme constituiren, denselben Grenzwerth haben; und mithin wird

$$\frac{\omega \varphi(2\Delta)}{4\Delta} B$$

der Grenzwerth der ganzen Hauptsumme

$$\varrho \sum \frac{1}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^{1+\varrho}}$$

sein. Um nun den Flächeninhalt B des durch die drei obigen Ungleichheiten definirten Hyperbelsectors zu finden, wird man am besten Polarcoordinaten r, φ einführen, indem man

$$\xi = r\cos\varphi, \quad \eta = r\sin\varphi$$

setzt, wo, wie gewöhnlich, r stets positiv und φ zwischen 0 und 2π genommen werden soll, was hinreicht, um jeden Punct (ξ, η) der Ebene einmal und nur einmal zu erzeugen. Durch diese Transformation verwandeln sich die früheren Grenzbedingungen in folgende:

$$\sin\varphi \geqq 0; \quad a \operatorname{cotang}\varphi + b > \frac{T}{U};$$

$$r^2 (a\cos\varphi^2 + 2b\cos\varphi\sin\varphi + c\sin\varphi^2) \leqq 1,$$

und wir wiederholen die frühere Bemerkung, dass für jeden, den beiden ersten Bedingungen genügenden Winkel φ die Grössen

$$a\cos\varphi + (b + \sqrt{D})\sin\varphi, \quad a\cos\varphi + (b - \sqrt{D})\sin\varphi,$$
$$a\cos\varphi^2 + 2b\cos\varphi\sin\varphi + c\sin\varphi^2$$

positiv sind, so dass also innerhalb des durch diese beiden ersten Bedingungen begrenzten Winkelraumes keine Asymptote, sondern nur ein endliches Stück der Hyperbel liegt, woraus schon folgt, dass der entsprechende Sector jedenfalls einen endlichen Werth hat*). Dieser wird bekanntlich durch die Formel

$$B = \int\int r\,dr\,d\varphi = \tfrac{1}{2}\int r^2 d\varphi$$

gefunden, wo nun in dem einfachen Integral rechts für r^2 der in der Peripherie der Hyperbel geltende Werth

$$r^2 = \frac{1}{a\cos\varphi^2 + 2b\cos\varphi\sin\varphi + c\sin\varphi^2}$$

$$= \frac{a}{2\sqrt{D}}\left\{\frac{1}{a\operatorname{cotang}\varphi + b - \sqrt{D}} - \frac{1}{a\operatorname{cotang}\varphi + b + \sqrt{D}}\right\}\frac{1}{\sin\varphi^2}$$

zu setzen ist; wir erhalten daher, indem wir cotang φ als neue Variabele betrachten, und

$$\frac{d\varphi}{\sin\varphi^2} = -\,d\operatorname{cotang}\varphi$$

setzen, das unbestimmte Integral

$$\frac{1}{2}\int r^2 d\varphi$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{D}}\int\frac{a\,d\operatorname{cotang}\varphi}{a\operatorname{cotang}\varphi + b + \sqrt{D}} - \frac{1}{4\sqrt{D}}\int\frac{a\,d\operatorname{cotang}\varphi}{a\operatorname{cotang}\varphi + b - \sqrt{D}}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{D}}\log\frac{a\operatorname{cotang}\varphi + b + \sqrt{D}}{a\operatorname{cotang}\varphi + b - \sqrt{D}};$$

diese Integration ist aber auszudehnen über alle Werthe von φ, welche einen positiven Sinus haben, also von $\varphi = 0$ ab bis zu dem Werth, wo $U(a\operatorname{cotang}\varphi + b) = T$ wird; dieser Endwerth von φ ist durch die Bedingung, dass $\sin\varphi$ positiv sein soll, vollständig bestimmt, und wir haben schon oben darauf hingewiesen, dass innerhalb dieses ganzen Winkelraums die beiden Grössen

$$a\operatorname{cotang}\varphi + b + \sqrt{D},\quad a\operatorname{cotang}\varphi + b - \sqrt{D}$$

stets das positive Zeichen behalten, so dass das obige unbestimmte Integral eine stetige reelle Function von φ ist, woraus folgt, dass wir nur die beiden Grenzen in dasselbe einzusetzen haben. Auf diese Weise erhalten wir

$$B = \frac{1}{4\sqrt{D}}\log\frac{T + U\sqrt{D}}{T - U\sqrt{D}} = \frac{1}{2\sqrt{D}}\log\frac{T + U\sqrt{D}}{\sigma}.$$

---

*) Hieraus folgt wieder nachträglich die Convergenz der bisher betrachteten Reihen für jeden positiven Werth von ϱ, d. h. für jeden Werth von $s > 1$.

Der Grenzwerth der auf die Form (a, b, c) bezüglichen Hauptsumme wird daher, wenn man statt $\varDelta$ wieder D schreibt, gleich

$$\frac{\omega\varphi(2D)}{8D\sqrt{D}}\log\frac{T+U\sqrt{D}}{\sigma},$$

wo, wie früher, T, U die beiden kleinsten der unbestimmten Gleichung $T^2 - DU^2 = \sigma^2$ genügenden positiven Zahlen bedeuten. Mithin zeigt sich auch hier, wie früher bei den Formen von negativer Determinante, dass der Grenzwerth einer auf eine einzelne Form (a, b, c) des Systems S bezüglichen Hauptsumme nur von der Determinante D (und der Art σ), dagegen gar nicht von dem individuellen Charakter der Form abhängt, dass er also für alle diese Formen derselbe ist. Bezeichnen wir wieder mit h die Anzahl aller in S enthaltenen Formen, d. h. die *Anzahl aller Classen ursprünglicher Formen σter Art für die positive Determinante D*, so ist daher

$$h\frac{\omega\varphi(2D)}{8D\sqrt{D}}\log\frac{T+U\sqrt{D}}{\sigma}$$

der Grenzwerth, welchem für unendlich abnehmende positive Werthe von ϱ die linke Seite unserer Hauptgleichung sich nähert. Auf der rechten Seite ist $\varkappa = 1$, ferner ebenso wie früher bei Formen von negativer Determinante

$$\lim \varrho \sum \frac{1}{n^{1+\varrho}} = \frac{\varphi(2\varDelta)}{2\varDelta} = \frac{\varphi(2D)}{2D},$$

und folglich erhalten wir durch Vergleichung beider Seiten der Hauptgleichung das Resultat

$$h = \frac{1}{\sigma\omega}\cdot\frac{4\sqrt{D}}{\log\frac{T+U\sqrt{D}}{\sigma}}\cdot\lim\sum\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^{1+\varrho}}.$$

§. 99.

Für Formen der ersten Art ist $\sigma = 1$, und $\omega = 2$ (§. 94); hieraus folgt für die Anzahl der Classen ursprünglicher Formen erster Art der Ausdruck

$$h = \frac{2\sqrt{D}}{\log(T+U\sqrt{D})}\cdot\lim\sum\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^{1+\varrho}},$$

wo T, U die kleinsten der Gleichung

$$T^2 - D U^2 = 1$$

genügenden positiven ganzen Zahlen bedeuten. Ist ferner $D \equiv 1$ (mod. 4), so existiren auch Formen der zweiten Art, deren Anzahl wir mit h' bezeichnen wollen; es ist dann $\sigma = 2$, und $\omega = 1$ oder $= 3$ zu setzen, je nachdem $D \equiv 1$ (mod. 8) oder $\equiv 5$ (mod. 8) ist; wir erhalten daher, wenn wir zur Unterscheidung mit T', U' die kleinsten der unbestimmten Gleichung

$$T'^2 - D U'^2 = 4$$

genügenden ganzen positiven Zahlen bezeichnen,

$$h' = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{2 \sqrt{D}}{\log \frac{1}{2}(T' + U' \sqrt{D})} \cdot \lim \Sigma \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^{1+\varrho}}.$$

Nun ist einleuchtend, dass jede Auflösung (t, u) der Gleichung $t^2 - D u^2 = 1$ durch Verdoppelung eine Auflösung $(t' = 2t, u' = 2u)$ der Gleichung $t'^2 - D u'^2 = 4$ giebt, und umgekehrt, dass man durch Halbirung jeder *geraden* Auflösung (t', u') der letztern eine Auflösung (t, u) der erstern erhält. Hieraus folgt unmittelbar, dass $(t' = 2T, u' = 2U)$ jedenfalls die kleinste gerade Auflösung der Gleichung $t'^2 - D u'^2 = 4$ ist. Ist nun zunächst $D \equiv 1$ (mod. 8), so kann diese Gleichung überhaupt nur gerade Auflösungen haben; denn wäre eine der beiden Zahlen t', u' und folglich auch die andere ungerade, so wäre die linke Seite durch 8 theilbar, während sie doch $= 4$ sein soll; in diesem Fall ist daher

$$T' = 2T, \quad U' = 2U, \quad \frac{T' + U' \sqrt{D}}{2} = T + U \sqrt{D},$$

und da ausserdem $\omega = 1$ ist, so ergiebt sich

$$h' = h, \text{ wenn } D \equiv 1 \text{ (mod. 8)}.$$

Im andern Fall $D \equiv 5$ (mod. 8) kann die Regel nicht so bestimmt ausgesprochen werden, indem bei manchen dieser Determinanten die kleinste Auflösung (T', U') wieder eine gerade, bei anderen aber eine ungerade ist. Im ersten dieser beiden Fälle ist dann wieder $T' = 2T$, $U' = 2U$ und folglich, da $\omega = 3$ ist,

$$h' = \tfrac{1}{3} h, \text{ wenn } D \equiv 5 \text{ (mod. 8), und } T', U' \text{ gerade};$$

es giebt unterhalb 200 nur 5 Determinanten, nämlich 37, 101, 141, 189, 197, für welche dieser Fall eintritt*).

---

*) Vergl. *Cayley: Note sur l'équation* $x^2 - D y^2 = \pm 4$, $D \equiv 5$ (mod. 8), Crelle's Journal LIII. p. 369. Man findet daselbst eine Tabelle, welche bis $D = 997$ reicht.

Im zweiten Falle, wenn T', U' ungerade sind, haben wir unter allen positiven Auflösungen (t', u'), welche (§. 85) aus der Formel

$$\frac{t' + u'\sqrt{D}}{2} = \left(\frac{T' + U'\sqrt{D}}{2}\right)^n$$

für positive Werthe von n entspringen, die kleinste gerade aufzusuchen. Versuchen wir daher die nächst grössere Auflösung, welche dem Exponenten $n = 2$ entspricht, so erhalten wir

$$t' = \frac{T'^2 + DU'^2}{2}, \quad u' = T'U';$$

da u' offenbar ungerade ist, so gehen wir zu dem folgenden Exponenten $n = 3$ über, um die nächst grössere Auflösung zu prüfen; da finden wir

$$t' = \frac{T'^3 + 3DT'U'^2}{4} = T' \frac{T'^2 + 3DU'^2}{4},$$

und da

$$T'^2 \equiv U'^2 \equiv 1 \pmod{8}, \quad 3D \equiv -1 \pmod{8}$$

ist, so folgt, dass t' und folglich auch u' gerade Zahlen werden, und also $t' = 2T$, $u' = 2U$ ist. Wir haben daher in diesem Falle

$$T + U\sqrt{D} = \left(\frac{T' + U'\sqrt{D}}{2}\right)^3$$

und

$$\log \frac{T' + U'\sqrt{D}}{2} = \tfrac{1}{3}\log(T + U\sqrt{D});$$

berücksichtigt man ferner, dass $\omega = 3$ ist, so ergiebt sich die Relation

$$h' = h, \quad \text{wenn } D \equiv 5 \pmod{8}, \quad \text{und } T', U' \text{ ungerade.}$$

Auch für positive Determinanten hat *Gauss**) ebenfalls die Relationen zwischen den Anzahlen der Formen der ersten und zweiten Art aufgestellt, für den letzten Fall aber, in welchem $D \equiv 5 \pmod{8}$ ist, in ganz anderer Form; er zeigt nämlich, dass die drei ursprünglichen Formen

$$(1, 0, -D), \left(4, 1, \frac{1-D}{4}\right), \left(4, 3, \frac{9-D}{4}\right)$$

entweder alle äquivalent sind, oder drei verschiedenen Classen angehören; und je nachdem das Erstere oder Letztere eintritt, ist $h' = h$ oder $h' = \frac{1}{3}h$.

---

*) *D. A.* art. 256. VI. — Vergl. §. 151, I.

§. 100.

Nachdem wir im Vorhergehenden für alle Fälle gezeigt haben, wie die Classenanzahl der Formen zweiter Art aus der der Formen erster Art gefunden werden kann, beschränken wir die fernere Untersuchung lediglich auf die Bestimmung der letztern. Bevor wir aber dazu übergehen, können wir eine weitere Zurückführung unserer Aufgabe vornehmen, indem wir zeigen, dass man nur solche Determinanten D zu betrachten braucht, welche durch keine Quadratzahl (ausser 1) theilbar sind.

Ist D eine beliebige Determinante, so kann man immer $D = D' S^2$ setzen, wo S^2 das grösste*) in D aufgehende Quadrat, und also D' ein Product aus lauter ungleichen Primzahlen (oder auch $= -1$) ist, welches dem Zeichen nach mit D übereinstimmt; dann lässt sich die Classenanzahl der Formen von der Determinante D auf die der Formen von der Determinante D' zurückführen. Bezeichnen wir alle auf die Determinante D' bezüglichen Grössen durch beigesetzte Accente, so wollen wir zunächst die beiden Summen

$$\Sigma \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^s} \quad \text{und} \quad \Sigma \left(\frac{D'}{n'}\right) \frac{1}{n'^s}$$

mit einander vergleichen, in welchen wir der Bequemlichkeit halber s statt $1 + \varrho$ geschrieben haben. In der zweiten muss der Buchstabe n' alle positiven Zahlen durchlaufen, welche relative Primzahlen gegen $2D'$ sind. Bezeichnen wir mit q' alle positiven ungeraden nicht in D' aufgehenden, und, wie früher, mit q alle positiven ungeraden nicht in D aufgehenden Primzahlen, so ist, wie wir früher gesehen haben,

$$\Sigma \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^s} = \Pi \frac{1}{1 - \left(\frac{D}{q}\right) \frac{1}{q^s}}$$

und natürlich ebenso

$$\Sigma \left(\frac{D'}{n'}\right) \frac{1}{n'^s} = \Pi \frac{1}{1 - \left(\frac{D'}{q'}\right) \frac{1}{q'^s}}.$$

---

*) Die folgende Untersuchung gilt auch für den Fall, dass D' selbst noch quadratische Factoren hat.

Offenbar bildet nun das System der Primzahlen q nur einen Theil der Primzahlen q', denn eine in $D = D' S^2$ nicht aufgehende Primzahl q geht auch nicht in D' auf und ist folglich eine der Primzahlen q'. Das System der Primzahlen q' besteht daher aus dem der Primzahlen q und aus solchen ungeraden Primzahlen r, welche nicht in D', wohl aber in D, also auch in S aufgehen, und deren Anzahl offenbar endlich ist. Das auf die Determinante D' bezügliche unendliche Product wird sich daher in folgender Weise zerlegen

$$\Pi \frac{1}{1 - \left(\frac{D'}{q'}\right) \frac{1}{q'^s}} = \Pi \frac{1}{1 - \left(\frac{D'}{q}\right) \frac{1}{q^s}} \cdot \Pi \frac{1}{1 - \left(\frac{D'}{r}\right) \frac{1}{r^s}};$$

da nun ferner $D = D' S^2$ und folglich

$$\left(\frac{D}{q}\right) = \left(\frac{D' S^2}{q}\right) = \left(\frac{D'}{q}\right)$$

ist, so erhalten wir, indem wir statt der beiden unendlichen Producte wieder die unendlichen Reihen aufschreiben, das Resultat

$$\Sigma \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^s} = \Sigma \left(\frac{D'}{n'}\right) \frac{1}{n'^s} \cdot \Pi \left(1 - \left(\frac{D'}{r}\right) \frac{1}{r^s}\right)$$

und hieraus

$$\lim \Sigma \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^{1+\varrho}} = \Pi \left(1 - \left(\frac{D'}{r}\right) \frac{1}{r}\right) \lim \Sigma \left(\frac{D'}{n'}\right) \frac{1}{n'^{1+\varrho}},$$

wo also das Productzeichen sich auf alle ungeraden in S, aber nicht in D' aufgehenden Primzahlen r bezieht.

Nachdem wir so für positive wie negative Determinanten das Verhältniss zwischen den beiden analogen Grenzwerthen bestimmt haben, die als Factoren in den Classenanzahlen h und h' für die Determinanten D und D' auftreten, müssen wir wieder die beiden Hauptfälle von einander trennen.

Ist zunächst D' und folglich auch D *negativ*, so haben wir (da wir uns auf Formen der ersten Art beschränken)

$$h = \frac{2\sqrt{-D}}{\pi} \lim \Sigma \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^{1+\varrho}}$$

und, den einzigen Fall ausgenommen, in welchem $D' = -1$,

$$h' = \frac{2\sqrt{-D'}}{\pi} \lim \Sigma \left(\frac{D'}{n'}\right) \frac{1}{n'^{1+\varrho}}.$$

Mit Ausnahme des Falles $D' = -1$ ist daher, mit Rücksicht auf das eben gefundene Verhältniss der beiden Grenzwerthe der unendlichen Reihen,

$$h = h' \times S \,.\, \Pi\left(1 - \left(\frac{D'}{r}\right)\frac{1}{r}\right);$$

ist aber $D' = -1$, also $\varkappa' = 4$, $h' = 1$, und $D = -S^2$ nicht ebenfalls $= -1$, also $S > 1$, so ist die Classenanzahl für eine solche Determinante D gleich

$$\tfrac{1}{2} S\, \Pi\left(1 - \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(r-1)}}{r}\right).$$

Für *positive* Determinanten haben wir folgende Formeln erhalten:

$$h = \frac{2\sqrt{D}}{\log(T + U\sqrt{D})} \lim \Sigma \left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^{1+\varrho}}$$

$$h' = \frac{2\sqrt{D'}}{\log(T' + U'\sqrt{D'})} \lim \Sigma \left(\frac{D'}{n'}\right)\frac{1}{n'^{1+\varrho}}$$

wo T', U' die kleinsten positiven Zahlen bedeuten, die der Gleichung $T'^2 - D'U'^2 = 1$ genügen; hieraus ergiebt sich

$$h = h' \frac{\log(T' + U'\sqrt{D'})}{\log(T + U\sqrt{D})} \times S \,.\, \Pi\left(1 - \left(\frac{D'}{r}\right)\frac{1}{r}\right),$$

und es kommt nur noch darauf an, das Verhältniss der beiden Logarithmen in rationaler Form anzugeben. Offenbar liefert nun jede Lösung (t, u) der Gleichung

$$t^2 - Du^2 = 1, \quad \text{d. h.} \quad t^2 - D'S^2u^2 = 1$$

eine Lösung der Gleichung

$$t'^2 - D'u'^2 = 1,$$

in welcher

$$t' = t, \quad u' = Su,$$

also das zweite Element u' durch S theilbar ist; und umgekehrt, sobald in der Lösung (t', u') das zweite Element u' durch S theilbar ist, so erhält man hieraus eine Lösung der erstern. Hieraus folgt. dass die beiden Zahlen

$$t' = T, \quad u' = SU$$

die kleinste positive Lösung der zweiten Gleichung bilden, in welcher das zweite Element durch S theilbar ist; man kann daher

$$T + SU\sqrt{D'} = T + U\sqrt{D} = (T' + U'\sqrt{D'})^{\lambda}$$

setzen, wo λ der kleinste positive ganze Exponent ist, für welchen der irrationale Bestandtheil der Potenz einen durch S theilbaren Coefficienten erhält; und dann ist

$$h = h' \times \frac{1}{\lambda} \cdot S \cdot \Pi \left(1 - \left(\frac{D'}{r}\right) \frac{1}{r}\right).$$

Setzt man, wie früher,

$$(T' + U' \sqrt{D'})^\nu = t'_\nu + u'_\nu \sqrt{D'},$$

so lässt sich der Werth von λ unmittelbar angeben, wenn für jede einzelne in S aufgehende Primzahl p die kleinste Zahl ν bekannt ist, für welche u'_ν durch p theilbar, und zugleich die höchste Potenz von p gegeben ist, welche dann in u'_ν aufgeht *); doch gehen wir hierauf nicht weiter ein, da der Hauptzweck, das Verhältniss zwischen den Classenanzahlen h und h' für die Determinanten D und D' zu finden, erreicht ist.

Dieselbe Aufgabe ist, wenigstens für negative Determinanten, auch schon von *Gauss* vollständig gelöst **).

§. 101.

In Folge der vorhergehenden Untersuchungen können wir uns auf den Fall beschränken, in welchem die Determinante D durch kein Quadrat ausser 1 theilbar ist, und es bleibt nur noch übrig, den Grenzwerth der unendlichen Reihe

$$\Sigma \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^{1+\varrho}}$$

für unendlich abnehmende positive Werthe von ϱ wirklich zu bestimmen.

So lange ϱ positiv bleibt, ist diese Reihe immer convergent, und zwar ist ihre Summe durchaus unabhängig von der Ordnung, in welcher man ihre Glieder auf einander folgen lässt; ist aber $\varrho = 0$, so gehört diese Reihe zu der Classe derjenigen, in welcher die Summe der positiven Glieder für sich, so wie die der negativen Glieder für sich genommen unendlich gross ist. Da nun unter der Summe einer unendlichen convergirenden Reihe stets der Grenzwerth verstanden wird, welchem sich die Summe ihrer *ersten* n Glieder nähert, wenn die Gliederanzahl n unbegrenzt wächst, so sieht man

*) *Dirichlet: Ueber eine Eigenschaft der quadratischen Formen von positiver Determinante* (Crelle's Journal LIII).

**) *D. A.* art. 256. V. — Vergl. §. 151, II. — Die obigen Sätze sind auf anderm Wege auch von *Lipschitz* bewiesen (Crelle's Journal LIII).

leicht ein, dass bei einer unendlichen Reihe von dieser eigenthümlichen Beschaffenheit erst dann von ihrer Convergenz und von ihrer Summe die Rede sein kann, nachdem ihre sämmtlichen Glieder in eine bestimmte *Ordnung* gebracht sind, nach welcher eines auf das andere folgt; denn die Summe, wenn sie überhaupt existirt, hängt wesentlich von der Compensation ab, welche zwischen den für sich allein unendlich wachsenden positiven und negativen Bestandtheilen gerade durch diese Anordnung der Glieder hervorgebracht wird. Eine solche unendliche Reihe hat daher ganz verschiedene Summen, je nach der verschiedenen Anordnung der Glieder. Aber gesetzt auch, dies wäre gar nicht der Fall, sondern die Reihe hätte auch für den Werth $\varrho = 0$ einen vollständig bestimmten Werth, so würde sich immer noch fragen, ob dieser Werth auch der Grenzwerth ist, welchem sich der Werth der Reihe unendlich nähert, wenn ϱ unendlich klein wird, d. h. es würde sich fragen, ob der Werth der unendlichen Reihe sich an der Stelle $\varrho = 0$ *stetig* mit ϱ ändert.

Ueber alle diese Zweifel entscheidet nun der folgende allgemeine Satz*): *Sind $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ unendlich viele Constanten von der Beschaffenheit, dass die Summe*

$$\beta_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n,$$

wie gross auch n werden mag, ihrem absoluten Werth nach stets kleiner bleibt als eine feste Constante C, so convergirt die unendliche Reihe

$$\frac{\alpha_1}{1^s} + \frac{\alpha_2}{2^s} + \frac{\alpha_3}{3^s} + \cdots + \frac{\alpha_m}{m^s} + \cdots$$

für jeden positiven Werth des Exponenten s (excl. $s = 0$) und ist zugleich eine stetige Function von s.

Um dies zu beweisen, vergleichen wir die vorstehende Reihe mit der folgenden

$$\beta_1\left(\frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s}\right) + \beta_2\left(\frac{1}{2^s} - \frac{1}{3^s}\right) + \beta_3\left(\frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s}\right) + \cdots$$

Die Summen der ersten n Glieder der erstern und letztern Reihe unterscheiden sich von einander nur um

$$\frac{\beta_n}{(n+1)^s};$$

da nun der Voraussetzung nach β_n seinem absoluten Werth nach

*) *Dirichlet: Recherches etc.* §. 1. — Vergl. §. 143.

stets unterhalb der endlichen Grösse C bleibt, und s positiv ist, so wird dieser Unterschied mit unbegrenzt wachsendem n unendlich klein werden. Nähert sich daher die Summe der ersten n Glieder der einen Reihe einem bestimmten Grenzwerth, d. h. convergirt die eine Reihe, so ist dies auch mit der andern der Fall, und zwar hat sie dieselbe Summe. Wir brauchen daher die obigen Behauptungen nur für die letztere Reihe zu beweisen; dazu betrachten wir die Summe von beliebig vielen Gliedern, welche auf die ersten n Glieder folgen:

$$\beta_{n+1}\left(\frac{1}{(n+1)^s}-\frac{1}{(n+2)^s}\right)+\cdots$$
$$+\beta_{n+m}\left(\frac{1}{(n+m)^s}-\frac{1}{(n+m+1)_s}\right);$$

da die Differenzen

$$\frac{1}{(n+1)^s}-\frac{1}{(n+2)^s},\quad \frac{1}{(n+2)^s}-\frac{1}{(n+3)^s}\cdots$$

sämmtlich positiv sind, und ihre Coefficienten

$$\beta_{n+1},\quad \beta_{n+2}\cdots$$

absolut genommen sämmtlich kleiner als C sind, so ist die Summe dieser m Glieder absolut genommen auch kleiner als das Product aus C und der Summe jener m Differenzen, d. h. kleiner als

$$C\left(\frac{1}{(n+1)^s}-\frac{1}{(n+m+1)^s}\right)$$

und folglich auch kleiner als

$$\frac{C}{(n+1)^s}<\frac{C}{n^s};$$

die Summe dieser m Glieder der Reihe kann daher, wie gross ihre Anzahl m auch genommen werden mag, durch hinreichend grosse Werthe von n kleiner gemacht werden, als jeder vorher vorgeschriebene noch so kleine Werth. Das Stattfinden dieser Erscheinung ist aber bekanntlich nicht nur ein erforderliches, sondern auch ein ausreichendes Kennzeichen für die Convergenz einer jeden unendlichen Reihe.

Nachdem so für jeden positiven Werth von s die Convergenz der Reihe gezeigt ist, haben wir noch zu beweisen, dass der Werth der Reihe sich stetig mit s ändert; wir weisen dies nach für das Gebiet aller positiven Werthe von s, die grösser sind als ein bestimmter positiver Werth σ; da man nämlich, wie klein ein von

Null verschiedener positiver Werth s auch sein mag, immer noch einen positiven Werth σ angeben kann, welcher unterhalb s liegt, so wird der Beweis dann wirklich für alle positiven Werthe s (excl. $s = 0$) gelten. Nun können wir die ganze Reihe als aus zwei Theilen bestehend ansehen, deren erster die Summe ihrer ersten n Glieder

$$\beta_1\left(\frac{1}{1^s}-\frac{1}{2^s}\right)+\cdots+\beta_n\left(\frac{1}{n^s}-\frac{1}{(n+1)^s}\right),$$

also eine stetige Function von s ist, während der zweite, wie im Vorhergehenden bewiesen ist, sicher

$$< \frac{C}{n^s} \text{ und also auch } < \frac{C}{n^\sigma}$$

ist; dieser letztere Theil kann also durch die Wahl eines hinreichend grossen Werthes von n, d. h. durch eine zweckmässige Zerlegung der ganzen Reihe, kleiner gemacht werden, als irgend ein vorgeschriebener Werth; und zwar wird, was besonders wichtig ist, für *alle* Werthe von $s > \sigma$ dies durch einen und denselben Werth von n, d. h. durch eine und dieselbe Zerlegung der unendlichen Reihe bewirkt werden. Da nun der erste Bestandtheil stetig ist, so kann eine etwaige Unstetigkeit des Ganzen nur von einer Unstetigkeit des zweiten Bestandtheils herrühren, und folglich muss, da dieser zweite Theil für alle in Betracht kommenden Werthe von s absolut genommen $< Cn^{-\sigma}$ ist, die Grösse einer plötzlichen Werthänderung beim Durchlaufen eines bestimmten Werthes von s jedenfalls $< 2\,Cn^{-\sigma}$ sein. Da wir aber durch zweckmässige Wahl von n diesen Werth beliebig klein machen können, so folgt, dass gar keine Unstetigkeit vorkommen kann; denn fände wirklich ein Sprung um eine Grösse μ Statt, so nehme man n so gross, dass $2\,Cn^{-\sigma} < \mu$ wird, so ergiebt sich augenblicklich der Widerspruch.

Nachdem so der obige Satz vollständig bewiesen ist, wenden wir ihn auf unsere Reihe

$$\Sigma\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^{1+\varrho}}$$

an, in welcher die Glieder von jetzt ab stets *so geordnet* werden sollen, dass die Zahl *n beständig wächst.* Unter *dieser* Voraussetzung erkennt man leicht, dass diese Reihe einen speciellen Fall der in dem vorstehenden Satze untersuchten Reihe bildet; setzt man nämlich

$$\alpha_m = \left(\frac{D}{m}\right) \text{ oder } = 0,$$

je nachdem m relative Primzahl zu $2D$ (also eine Zahl n) ist oder nicht, und lässt m ein vollständiges Restsystem (mod. $4D$) durchlaufen, so ist die Summe der entsprechenden Coefficienten α_m stets $= 0$, weil diese Coefficienten α_m theils selbst $= 0$ sind und die übrigen, wie eine frühere Untersuchung (§. 52) ergeben hat, zur Hälfte den Werth $+1$, zur andern Hälfte den Werth -1 besitzen. Hieraus folgt unmittelbar, dass die Summe von noch so vielen auf einander folgenden Coefficienten α_m stets unterhalb einer endlichen Grösse ($\pm 2D$) bleibt. Mithin ist die in der oben angegebenen Art geordnete Reihe

$$\Sigma \frac{\alpha_m}{m^s} = \Sigma \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^s}$$

convergent, so lange s positiv bleibt, und zugleich eine stetige Function von s; und folglich wird, wenn ϱ unendlich klein wird,

$$\lim \Sigma \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^{1+\varrho}} = \Sigma \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n},$$

wo, wie wir nochmals hervorheben, die Glieder der Reihe *so geordnet* sind, dass *n beständig wächst.*

§. 102.

Es ist nun zweckmässig, bei der Bestimmung der Summe der unendlichen Reihe

$$N = \Sigma \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n}$$

dieselben vier Fälle zu unterscheiden, welche wir früher (§. 52) aufgestellt haben. Wir wenden uns zunächst zu dem Fall, in welchem

$$D = \pm P \equiv 1 \text{ (mod. 4), also } \left(\frac{D}{n}\right) = \left(\frac{n}{P}\right)$$

ist, wo P den absoluten Werth von D bedeutet, und also eine positive ungerade, durch kein Quadrat theilbare Zahl und > 1 ist. Dann lässt sich die Reihe

$$N = \Sigma \left(\frac{n}{P}\right) \frac{1}{n}$$

leicht auf die Reihe

$$M = \Sigma \left(\frac{m}{P}\right)\frac{1}{m}$$

zurückführen, in welcher m beständig wachsend *alle* positiven relativen Primzahlen zu P, auch die *geraden* durchläuft. Da jedesmal, wenn m ein vollständiges Restsystem (mod. P) durchläuft, zufolge §. 52, (3)

$$\Sigma \left(\frac{m}{P}\right) = 0$$

ist, so convergirt die Reihe M; ist ferner k eine beliebige positive ganze Zahl, und betrachtet man alle diejenigen Zahlen m, welche $< 2kP$ sind, so sind dieselben zum Theil ungerade, zum Theil gerade; die erstern stimmen offenbar mit allen Zahlen $n < 2kP$ überein, und die letztern sind von der Form $2m'$, wo m' alle diejenigen Zahlen m durchläuft, welche $< kP$ sind. In dieser Ausdehnung ist daher

$$\Sigma \left(\frac{m}{P}\right) \frac{1}{m} = \Sigma \left(\frac{n}{P}\right) \frac{1}{n} + \Sigma \left(\frac{2m'}{P}\right) \frac{1}{2m'}$$
$$= \Sigma \left(\frac{n}{P}\right) \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{P}\right) \frac{1}{2} \Sigma \left(\frac{m'}{P}\right) \frac{1}{m'},$$

und hieraus folgt, wenn man k über alle Grenzen wachsen lässt,

$$M = N + \left(\frac{2}{P}\right) \frac{1}{2} \cdot M, \quad N = \left(1 - \left(\frac{2}{P}\right) \frac{1}{2}\right) M.$$

Allgemeiner findet man leicht, dass

$$\Sigma \left(\frac{n}{P}\right) \frac{1}{n^s} = \left(1 - \left(\frac{2}{P}\right) \frac{1}{2^s}\right) \Sigma \left(\frac{m}{P}\right) \frac{1}{m^s}$$

ist; man braucht nur den reciproken Werth des ersten Factors auf der rechten Seite in eine geometrische Reihe zu verwandeln, und diese mit der Reihe auf der linken Seite zu multipliciren, so ergiebt sich als Product der zweite Factor auf der rechten Seite; oder man kann auch genau so wie oben verfahren, indem man die Zahlen m zerlegt in die Zahlen n und $2m'$.

§. 103.

Die nun noch auszuführende Summation kann mit Hülfe des in den Supplementen (I. §. 116) bewiesenen Satzes auf verschiedene Arten bewerkstelligt werden, entweder durch Zurückführung auf Fourier'sche Reihen, oder durch die Integration eines rationalen Bruchs. Wir schlagen den letztern Weg als den directern ein. Bedeutet m irgend eine positive ganze Zahl, so ist bekanntlich

$$\frac{1}{m} = \int_0^1 x^{m-1}\,dx,$$

und folglich ist auch

$$M = \Sigma \left(\frac{m}{P}\right) \frac{1}{m} = \Sigma \left(\frac{m}{P}\right) \int_0^1 x^{m-1}\,dx.$$

Da nun das Jacobi'sche Symbol für alle einander nach dem Modul P congruenten Zahlen m denselben Werth hat, so ist die Summe der Glieder unserer Reihe, in welchen $m < kP$, gleich

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} f(x)\, \frac{1 - x^{kP}}{1 - x^P},$$

wo zur Abkürzung

$$f(x) = \Sigma \left(\frac{\mu}{P}\right) x^{\mu}$$

gesetzt ist, und der Summationsbuchstabe μ die Werthe m durchlaufen muss, welche $< P$ sind. Da dieselben ein vollständiges Restsystem in Bezug auf den Modul P bilden, so ist nach einem schon öfter benutzten Satze (§. 52)

$$f(1) = \Sigma \left(\frac{\mu}{P}\right) = 0;$$

es ist folglich $f(x)$ theilbar durch $x(x-1)$, und mithin hat der Bruch

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{f(x)}{1 - x^P}$$

im reellen Integrationsintervall $0 \leqq x \leqq 1$ endliche Werthe. Hieraus folgt leicht, dass mit unbegrenzt wachsendem k das Integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} \frac{f(x)\, x^{kP}}{1-x^P}$$

unendlich klein wird, und wir erhalten folglich

$$\Sigma \left(\frac{m}{P}\right) \frac{1}{m} = \int_0^1 \frac{dx}{x} \frac{f(x)}{1-x^P};$$

die Aufgabe ist mithin darauf zurückgeführt, einen echten rationalen Bruch zu integriren, was bekanntlich durch Zerlegung desselben in sogenannte Partialbrüche geschieht. Setzen wir zur Abkürzung

$$\sqrt{-1} = i, \quad e^{\frac{2\pi i}{P}} = \theta,$$

so ist in unserm Fall der Nenner

$$x^P - 1 = \Pi(x - \theta^\alpha),$$

wo das Productzeichen sich auf den Buchstaben α bezieht, welcher ein vollständiges Restsystem in Bezug auf den Modul P durchlaufen muss; wir setzen fest, dass α die Werthe

$$0, 1, 2 \ldots (P-1)$$

durchlaufen soll; man erhält dann nach bekannten Regeln

$$\frac{1}{x} \frac{f(x)}{1-x^P} = -\frac{1}{P} \Sigma \frac{f(\theta^\alpha)}{x - \theta^\alpha},$$

wo das Summenzeichen sich auf den Buchstaben α bezieht. Nach der oben eingeführten Bezeichnung ist nun

$$f(\theta^\alpha) = \Sigma \left(\frac{\mu}{P}\right) e^{\mu \frac{2\alpha\pi i}{P}},$$

und diese Summe ist vermöge des in den Supplementen (I. §. 116) bewiesenen Satzes

$$= \left(\frac{\alpha}{P}\right) \sqrt{P} \,.\, i^{1/4 (P-1)^2}$$

wo die Quadratwurzel $\sqrt{P}$ *positiv*, und

$$\left(\frac{\alpha}{P}\right) = 0$$

zu nehmen ist, wenn α keine relative Primzahl zu P ist. Die Zerlegung in Partialbrüche liefert uns also das Resultat

$$\frac{1}{x} \frac{f(x)}{1-x^P} = -\frac{i^{1/4 (P-1)^2}}{\sqrt{P}} \Sigma \frac{\left(\frac{\alpha}{P}\right)}{x - \theta^\alpha},$$

wo das Summenzeichen sich auf den Buchstaben α bezieht, der nur alle die positiven ganzen Zahlen zu durchlaufen braucht, welche $< P$ und relative Primzahlen zu P sind.

Die nun auszuführenden Integrationen der einzelnen $\varphi(P)$ Partialbrüche sind in der einen Formel

$$\int \frac{dx}{x-a-bi} = \tfrac{1}{2}\log\left\{(x-a)^2+b^2\right\} + i\,\mathrm{arctang}\,\frac{x-a}{b}$$

oder

$$\int \frac{dx}{x-e^{\delta i}} = \tfrac{1}{2}\log\left\{x^2-2x\cos\delta+1\right\} + i\,\mathrm{arctang}\,\frac{x-\cos\delta}{\sin\delta}$$

enthalten, aus welcher, wenn $0<\delta<2\pi$ ist,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x-e^{\delta i}} =$$

$$\log(2\sin\tfrac{1}{2}\delta) + i\left\{\mathrm{arctang}\,(\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\delta) + \mathrm{arctang}\,(\mathrm{cotang}\,\delta)\right\}$$

folgt, vorausgesetzt, dass die beiden Arcus, welche in der Parenthese stehen, in dem Intervall zwischen $+\frac{1}{2}\pi$ und $-\frac{1}{2}\pi$ genommen werden. Mag nun δ zwischen 0 und π, oder zwischen π und 2π liegen, so ergiebt sich hieraus leicht, dass immer

$$\int_0^1 \frac{dx}{x-e^{\delta i}} = \log(2\sin\tfrac{1}{2}\delta) + i(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\delta)$$

ist.

Wenden wir dies auf unsern Fall an, so erhalten wir

$$\int_0^1 \frac{dx}{x-\theta^\alpha} = \log\left(2\sin\frac{\alpha\pi}{P}\right) + i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha\pi}{P}\right)$$

und folglich

$$\Sigma\left(\frac{m}{P}\right)\frac{1}{m} = -\frac{i^{1/4(P-1)^2}}{\sqrt{P}}\,\Sigma\left(\frac{\alpha}{P}\right)\left\{\log\left(2\sin\frac{\alpha\pi}{P}\right) + i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha\pi}{P}\right)\right\},$$

wo das Summenzeichen rechts sich auf alle $\varphi(P)$ Werthe von α erstreckt. Da nun

$$\Sigma\left(\frac{\alpha}{P}\right) = 0$$

ist, so können die in der Parenthese befindlichen Glieder, welche von α unabhängig sind, wie $\log 2$ und $\frac{1}{2}\pi i$ weggelassen werden, und man erhält dann

$$\Sigma\left(\frac{m}{P}\right)\frac{1}{m} = -\frac{i^{1/4(P-1)^2}}{\sqrt{P}}\,\Sigma\left(\frac{\alpha}{P}\right)\left\{\log\sin\frac{\alpha\pi}{P} - \frac{\alpha\pi i}{P}\right\}.$$

Dieses Resultat nimmt noch einfachere Formen an, wenn man die beiden Fälle $P \equiv 1 \pmod{4}$ und $P \equiv 3 \pmod{4}$ von einander trennt. Im erstern Falle ist nämlich

$$i^{1/4(P-1)^2} = 1$$

und folglich, da die linke Seite reell ist,

$$\Sigma\left(\frac{m}{P}\right)\frac{1}{m} = -\frac{1}{\sqrt{P}}\,\Sigma\left(\frac{\alpha}{P}\right)\log\sin\frac{\alpha\pi}{P}$$

$$\Sigma\left(\frac{\alpha}{P}\right)\alpha = 0;$$

im letztern Fall dagegen ist

$$i^{1/4(P-1)^2} = i$$

und folglich

$$\Sigma\left(\frac{m}{P}\right)\frac{1}{m} = -\frac{\pi}{P\sqrt{P}}\,\Sigma\left(\frac{\alpha}{P}\right)\alpha$$

$$\Sigma\left(\frac{\alpha}{P}\right)\log\sin\frac{\alpha\pi}{P} = 0.$$

Diese beiden Vereinfachungen lassen sich auch auf folgende Weise verificiren. Bedenkt man, dass $(P-\alpha)$ dieselben Werthe wie α durchläuft, so folgt

$$\Sigma\left(\frac{\alpha}{P}\right)\alpha = \Sigma\left(\frac{P-\alpha}{P}\right)(P-\alpha) = -\Sigma\left(\frac{-\alpha}{P}\right)\alpha$$

$$\Sigma\left(\frac{\alpha}{P}\right)\log\sin\frac{\alpha\pi}{P} = \Sigma\left(\frac{P-\alpha}{P}\right)\log\sin\frac{(P-\alpha)\pi}{P}$$

$$= \Sigma\left(\frac{-\alpha}{P}\right)\log\sin\frac{\alpha\pi}{P};$$

ist nun $P \equiv 1 \pmod{4}$, so folgt hieraus

$$\Sigma\left(\frac{\alpha}{P}\right)\alpha = -\Sigma\left(\frac{\alpha}{P}\right)\alpha = 0;$$

ist dagegen $P \equiv 3 \pmod{4}$, so ergiebt sich

$$\Sigma\left(\frac{\alpha}{P}\right)\log\sin\frac{\alpha\pi}{P} = -\Sigma\left(\frac{\alpha}{P}\right)\log\sin\frac{\alpha\pi}{P} = 0.$$

§. 104.

Hiermit ist nun für den von uns betrachteten Fall, in welchem die Determinante $D = \pm P \equiv 1 \pmod{4}$ und durch kein Quadrat theilbar ist, der gesuchte Grenzwerth

$$\Sigma \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n} = \left(1 - \left(\frac{2}{P}\right) \frac{1}{2}\right) \Sigma \left(\frac{m}{P}\right) \frac{1}{m}$$

wirklich in Form eines geschlossenen Ausdrucks gefunden, und um die Anzahl h der zu dieser Determinante D gehörenden ursprünglichen Formen der ersten Art zu erhalten, brauchen wir nur noch die beiden Fälle, in welchen D negativ oder positiv ist, von einander zu trennen.

Erstens. Ist D negativ $= -P$, und also $P \equiv 3 \pmod{4}$, so ist (§. 97)

$$h = \frac{2\sqrt{-D}}{\pi} \Sigma \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n}$$

und da in diesem Fall

$$\Sigma \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n} = \left(1 - \left(\frac{2}{P}\right) \frac{1}{2}\right) \Sigma \left(\frac{m}{P}\right) \frac{1}{m}$$
$$= -\left(1 - \left(\frac{2}{P}\right) \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{P\sqrt{P}} \Sigma \left(\frac{\alpha}{P}\right) \alpha$$

ist, so ergiebt sich

$$h = -\frac{1}{P}\left(2 - \left(\frac{2}{P}\right)\right) \Sigma \left(\frac{\alpha}{P}\right) \alpha,$$

wo α wieder alle positiven ganzen Zahlen durchlaufen muss, die $< P$ und relative Primzahlen zu P sind. Offenbar muss dieser Ausdruck für die Classenanzahl sich noch in der Weise umformen lassen, dass der Divisor P verschwindet. Dies lässt sich in der That durch folgende Betrachtung erreichen. Bezeichnet man mit α' diejenigen Zahlen α, welche $< \frac{1}{2} P$ sind, so stimmen die Zahlen $(P - \alpha')$ mit denjenigen Zahlen α überein, welche $> \frac{1}{2} P$ sind; es ist daher

$$\Sigma \left(\frac{\alpha}{P}\right) \alpha = \Sigma \left(\frac{\alpha'}{P}\right) \alpha' + \Sigma \left(\frac{P - \alpha'}{P}\right) (P - \alpha'),$$

wo die Summenzeichen rechts sich auf den Buchstaben α' beziehen; da nun $P \equiv 3 \pmod{4}$, und also

$$\left(\frac{P-\alpha'}{P}\right)=\left(\frac{-1}{P}\right)\left(\frac{\alpha'}{P}\right)=-\left(\frac{\alpha'}{P}\right)$$

ist, so erhalten wir

$$\Sigma\left(\frac{\alpha}{P}\right)\alpha=2\;\Sigma\left(\frac{\alpha'}{P}\right)\alpha'-P\,\Sigma\left(\frac{\alpha'}{P}\right).$$

Offenbar wird die Reihe aller Zahlen α aber auch erschöpft durch die sämmtlichen Zahlen $2\alpha'$ und $(P-2\alpha')$, und folglich ist auch

$$\Sigma\left(\frac{\alpha}{P}\right)\alpha=\Sigma\left(\frac{2\alpha'}{P}\right)2\alpha'+\Sigma\left(\frac{P-2\alpha'}{P}\right)(P-2\alpha')$$

oder nach leichten Reductionen

$$\left(\frac{2}{P}\right)\Sigma\left(\frac{\alpha}{P}\right)\alpha=4\;\Sigma\left(\frac{\alpha'}{P}\right)\alpha'-P\,\Sigma\left(\frac{\alpha'}{P}\right).$$

Zieht man diese Gleichung von der frühern ab, nachdem dieselbe mit 2 multiplicirt ist, so erhält man

$$\left\{2-\left(\frac{2}{P}\right)\right\}\Sigma\left(\frac{\alpha}{P}\right)\alpha=-P\,\Sigma\left(\frac{\alpha'}{P}\right)$$

und hierdurch verwandelt sich der obige Ausdruck für die Classenanzahl in den folgenden einfachsten:

$$h=\Sigma\left(\frac{\alpha'}{P}\right).$$

Wir können daher für diesen Fall als Resultat unserer ganzen Untersuchung folgenden Satz aussprechen:

Ist P eine positive, durch kein Quadrat theilbare Zahl von der Form $4n+3$, *und bezeichnet man mit* α' *alle relativen Primzahlen zu* P, *welche* $<\frac{1}{2}P$ *sind, so findet man die Classenanzahl h der zu der Determinante* $D=-P$ *gehörenden Formen der ersten Art, wenn man von der Anzahl derjenigen der Zahlen* α', *für welche*

$$\left(\frac{\alpha'}{P}\right)=+1$$

ist, die Anzahl der übrigen Zahlen α' *abzieht.*

Der Ausdruck dieses Satzes vereinfacht sich in dem speciellen Fall, wenn P eine einfache Primzahl ist, folgendermaassen:

Ist der absolute Werth p der negativen Determinante $D=-p$ *eine Primzahl von der Form* $4n+3$, *so ist die Classenanzahl h der zu ihr gehörigen Formen der ersten Art gleich dem Ueberschuss der Anzahl der zwischen* 0 *und* $\frac{1}{2}p$ *liegenden quadratischen Reste* *von p über die Anzahl der zwischen denselben Grenzen liegenden quadratischen Nichtreste von p.*

Dieser letztere Satz ist in einer nicht wesentlich verschiedenen Form schon einige Zeit vor der Veröffentlichung der Lösung des allgemeinen Problems*) durch Induction von *Jacobi***) gefunden.

Als Beispiel wählen wir die Determinante $D = -11$; unter den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 sind vier quadratische Reste 1, 3, 4, 5, und ein quadratischer Nichtrest 2 von 11; mithin ist die Anzahl der Formen erster Art $= 4 - 1 = 3$. In der That giebt es für diese Determinante nur drei (nicht äquivalente) reducirte Formen erster Art, nämlich $(1, 0, 11)$, $(3, 1, 4)$ und $(3, -1, 4)$.

Beiläufig mag hier bemerkt werden, dass zufolge des gewonnenen Resultats die Anzahl der Zahlen α', für welche

$$\left(\frac{\alpha'}{P}\right) = +1,$$

stets grösser ist, als die Anzahl der Zahlen α', für welche

$$\left(\frac{\alpha'}{P}\right) = -1$$

ist, da h immer eine positive Zahl, nie $= 0$ ist: ein Satz, welcher auch für den einfachsten Fall, wo P eine Primzahl von der Form $4n + 3$ ist, auf anderm Wege noch nicht hat bewiesen werden können (vergl. das Theorem über die arithmetische Progression, Supplement VI.).

Zweitens. Ist die Determinante D positiv $= +P$, und also $P \equiv 1 \pmod{4}$, so ist (nach §. 99) die Classenanzahl

$$h = \frac{2\sqrt{D}}{\log(T + U\sqrt{D})} \sum \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n}$$

und da in diesem Fall

$$\sum \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n} = \left(1 - \left(\frac{2}{P}\right) \frac{1}{2}\right) \sum \left(\frac{m}{P}\right) \frac{1}{m}$$

---

*) *Dirichlet: Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres* in Crelle's Journal XIX und XXI.

**) *Observatio arithmetica* in Crelle's Journal IX; vergl. *Dirichlet: Gedächtnissrede auf C. G. J. Jacobi*, und *Kummer: Gedächtnissrede auf G. P. Lejeune Dirichlet.*

$$= -\frac{1-\left(\frac{2}{P}\right)\frac{1}{2}}{\sqrt{P}}\,\Sigma\left(\frac{\alpha}{P}\right)\log\sin\frac{\alpha\pi}{P}$$

ist, so ergiebt sich

$$h = -\frac{2-\left(\frac{2}{P}\right)}{\log(T+U\sqrt{P})}\,\Sigma\left(\frac{\alpha}{P}\right)\log\sin\frac{\alpha\pi}{P}.$$

Bezeichnet man die Zahlen α mit a oder mit b, je nachdem

$$\left(\frac{\alpha}{P}\right) = +1 \text{ oder } = -1$$

ist, so nimmt die vorstehende Gleichung folgende Gestalt an:

$$h = \frac{2-\left(\frac{2}{P}\right)}{\log(T+U\sqrt{P})}\log\frac{\Pi\sin\frac{b\pi}{P}}{\Pi\sin\frac{a\pi}{P}};$$

hierin beziehen sich die Productzeichen Π im Zähler und Nenner resp. auf alle b und auf alle a; und ausserdem bedeuten T, U die kleinsten positiven ganzen Zahlen, welche der Pell'schen Gleichung

$$T^2 - PU^2 = 1$$

genügen. Der wahre Charakter dieses Resultates wird durch eine weitere Umformung (§. 107) noch deutlicher werden.

§. 105.

Nachdem im Vorhergehenden (§§. 102 bis 104) der Fall, in welchem $D \equiv 1 \pmod{4}$ ist, seine vollständige Erledigung gefunden hat, begnügen wir uns, die Hauptmomente für die allgemeine Untersuchung hervorzuheben. Es handelt sich zunächst um die Bestimmung der Reihe

$$N = \Sigma\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n},$$

in welcher n beständig wachsend alle positiven ganzen Zahlen durchlaufen muss, die relative Primzahlen zu $2D$ sind.

Gebrauchen wir nun die Buchstaben P, δ, ε genau in derselben Bedeutung, wie sie am Schluss des §. 52 festgesetzt ist, so ist

$$\left(\frac{D}{n}\right) = \delta^{\frac{1}{2}(n-1)}\,\varepsilon^{\frac{1}{8}(n^2-1)}\left(\frac{n}{P}\right),$$

und folglich stets

$$\left(\frac{D}{n}\right) = \left(\frac{D}{\nu}\right),$$

wenn $n \equiv \nu \pmod{8P}$ ist. Setzt man daher

$$\frac{1}{n} = \int_0^1 x^{n-1}\,dx,$$

und

$$f(x) = \Sigma\left(\frac{D}{\nu}\right) x^\nu,$$

wo ν alle die Zahlen n durchläuft, welche $< 8P$ sind, und berücksichtigt, dass $f(1) = 0$ ist (§. 52), so findet man unter der Voraussetzung, dass der Modulus von x auf dem Integrationswege < 1 bleibt, ähnlich wie in §. 103,

$$N = \int_0^1 \frac{f(x)}{1 - x^{8P}}\,\frac{dx}{x} = -\frac{1}{8P}\int_0^1 \Sigma\,\frac{f(\omega)\,dx}{x - \omega},$$

wo ω alle Wurzeln der Gleichung

$$\omega^{8P} = 1$$

durchlaufen muss; diese sind bekanntlich von der Form

$$\omega = j^r\,\theta^s,$$

wo zur Abkürzung

$$j = e^{\frac{\pi i}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}},\quad \theta = e^{\frac{2\pi i}{P}}$$

gesetzt ist; lässt man r und s vollständige Restsysteme resp. nach den Moduln 8 und P durchlaufen, so erhält ω seine sämmtlichen $8P$ Werthe.

Bedeuten nun μ und m resp. die kleinsten positiven Reste der Zahl ν in Bezug auf die Moduln 8 und P, so ist μ eine der vier Zahlen 1, 3, 5, 7, und m eine der $\varphi(P)$ relativen Primzahlen zu P; und da umgekehrt jedem solchen Restpaare μ, m eine und nur eine bestimmte Zahl ν entspricht (§. 25), so findet man, mit Zuziehung des in den Supplementen (§. 116) bewiesenen Hülfssatzes,

$$f(\omega) = \Sigma\left(\frac{D}{\nu}\right)\omega^{\nu} = \Sigma\ \delta^{1/2(\nu-1)}\,\varepsilon^{1/8(\nu^2-1)}\left(\frac{\nu}{P}\right)j^{\nu r}\,\theta^{\nu s}$$

$$= \Sigma\ \delta^{1/2(\mu-1)}\,\varepsilon^{1/8(\mu^2-1)}\,j^{\mu r}\ \Sigma\left(\frac{m}{P}\right)\theta^{ms}$$

$$= j^r\,(1+\delta\, i^{3r})\,(1+\varepsilon\,(-1)^r)\left(\frac{s}{P}\right) i^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2}\sqrt{P},$$

wo $\sqrt{P}$ *positiv* ist, und das Jacobi'sche Symbol den Werth Null hat, wenn s keine relative Primzahl zu P ist. Wenn $P = 1$, so sind die Factoren, in welchen P vorkommt wegzulassen. Setzen wir nun zur Abkürzung

$$\psi(r) = \int_0^1 \Sigma\left(\frac{s}{P}\right)\frac{dx}{x - j^r\theta^s},$$

wo s alle incongruenten Zahlen (mod. P) zu durchlaufen hat, die relative Primzahlen zu P sind, so ergiebt sich

$$N = -\frac{i^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2}}{8\sqrt{P}}\ \Sigma\, j^r\,(1+\delta\, i^{3r})\,(1+\varepsilon\,(-1)^r)\,\psi(r),$$

wo r ein vollständiges Restsystem (mod. 8) durchlaufen muss. Trennt man jetzt die vier Fälle von einander, so erhält man folgende Resultate:

I. $D = \pm P \equiv 1 \pmod{4}$, $\delta = +1$, $\varepsilon = +1$;

$$N\,.\,2\sqrt{P} = -i^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2}\{\psi(0) - \psi(4)\}.$$

II. $D = \pm P \equiv 3 \pmod{4}$, $\delta = -1$, $\varepsilon = +1$;

$$N\,.\,2\sqrt{P} = -i\,.\,i^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2}\{\psi(2) - \psi(6)\}.$$

III. $D = \pm 2P \equiv 2 \pmod{8}$, $\delta = +1$, $\varepsilon = -1$;

$$N\,.\,2\sqrt{2P} = -i^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2}\{\psi(1) - \psi(3) - \psi(5) + \psi(7)\}.$$

IV. $D = \pm 2P \equiv 6 \pmod{8}$, $\delta = -1$, $\varepsilon = -1$;

$$N\,.\,2\sqrt{2P} = -i\,.\,i^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2}\{\psi(1) + \psi(3) - \psi(5) - \psi(7)\}.$$

Dieselben Formeln gelten auch noch für den Fall $P = 1$, d. h. für die Fälle $D = -1$, $D = +2$, $D = -2$, wenn

$$\psi(r) = \int_0^1 \frac{dx}{x - j^r}$$

gesetzt wird. Zur Bestimmung der Werthe $\psi(r)$, auf welche es jetzt allein noch ankommt, dient wieder die unter der Voraussetzung $0 < \varphi < 2\pi$ gültige Gleichung

$$\int_0^1 \frac{dx}{x - e^{\varphi i}} = \log(2 \sin \tfrac{1}{2}\varphi) + \tfrac{1}{2}(\pi - \varphi)\, i,$$

und man findet hieraus für den Fall $P = 1$ leicht folgende Resultate:

$$\begin{aligned} D &= -1;\quad N = \frac{\pi}{4} \\ D &= +2;\quad N = \frac{\log(1 + \sqrt{2})}{\sqrt{2}} \\ D &= -2;\quad N = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, \end{aligned} \tag{1}$$

wo $\sqrt{2}$ positiv zu nehmen ist. Schliessen wir von jetzt an den Fall $P = 1$ gänzlich aus, so ist

$$\int_0^1 \frac{dx}{x - j^r \theta^s} = \log\left(2 \sin \frac{m\pi}{8P}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{m\pi}{8P}\right) i,$$

wo m den kleinsten positiven Rest der Zahl $(Pr + 8s)$ nach dem Modul $8P$ bedeutet, so dass

$$m \equiv Pr \pmod{8},\ m \equiv 8s \pmod{P},\ 0 < m < 8P$$

ist; hieraus folgt

$$\psi(r) = \left(\frac{2}{P}\right) \Sigma \left(\frac{m}{P}\right) \left\{\log\left(2 \sin \frac{m\pi}{8P}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{m\pi}{8P}\right) i\right\},$$

wo m diejenigen $\varphi(P)$ positiven Zahlen durchlaufen muss, welche relative Primzahlen zu P, kleiner als $8P$ und zugleich $\equiv Pr \pmod{8}$ sind; da dieselben nach dem Modul P incongruent sind, so ist (§. 52)

$$\Sigma \left(\frac{m}{P}\right) = 0,$$

und folglich nimmt die vorstehende Gleichung folgende einfachere Gestalt an

$$\begin{gathered} \psi(r) = \left(\frac{2}{P}\right) \Sigma \left(\frac{m}{P}\right) \left(\log \sin \frac{m\pi}{8P} - \frac{m\pi i}{8P}\right), \\ m \equiv Pr \pmod{8},\quad 0 < m < 8P. \end{gathered} \tag{2}$$

Hierdurch ist nun der Werth der unendlichen Reihe N in allen Fällen auf eine Summe von einer endlichen Anzahl von Gliedern zurückgeführt; dieselbe ist aber noch bedeutender Vereinfachungen fähig, zufolge gewisser Eigenschaften der acht Ausdrücke $\psi(r)$, die entweder aus der so eben gefundenen Form, oder auch aus ihrer ursprünglichen Definition leicht abgeleitet werden können. Indem wir den letztern Weg einschlagen, setzen wir zur Abkürzung

$$F(x) = \Pi(x-\theta^s)^{\left(\frac{s}{P}\right)} = \frac{\Pi(x-\theta^a)}{\Pi(x-\theta^b)} \tag{3}$$

wo die Buchstaben a und b die in §. 52 festgesetzte Bedeutung haben; dann wird zufolge der obigen Definition

$$\psi(r) = \int_0^1 d\log F(xj^{-r}),$$

wo der Modulus der Variabeln x auf dem Wege von 0 bis 1 stets < 1 bleibt, oder auch

$$\psi(r) = \int_0^{j^{-r}} d\log F(x),$$

wo, wenn die complexen Grössen in der bekannten Weise geometrisch durch Puncte einer Ebene dargestellt werden, der Punct x von 0 bis j^{-r} sich so bewegen muss, dass er im Innern des mit dem Halbmesser 1 um den Punct 0 beschriebenen Kreises bleibt. Die acht Puncte j^r zerlegen die Peripherie dieses Kreises in acht gleiche Octanten, auf welche sich die $\varphi(P)$ Puncte θ^s vertheilen, die ihrerseits wieder in zwei Classen θ^a und θ^b zerfallen.

Aus der Definition der Function $F(x)$ geht zunächst hervor, dass sie mit

$$\Pi(x'-\theta^{-s})^{\left(\frac{s}{P}\right)} = F(x')^{\left(\frac{-1}{P}\right)}$$

conjugirt ist, wenn x' den mit x conjugirten complexen Werth bedeutet; und hieraus folgt unmittelbar, dass $\psi(r)$ und

$$\left(\frac{-1}{P}\right)\int_0^{j^r} d\log F(x') = \left(\frac{-1}{P}\right)\psi(-r)$$

ebenfalls conjugirt sind. Setzt man daher zur Abkürzung

$$\begin{aligned} R(r) &= \psi(-r) + \left(\frac{-1}{P}\right)\psi(r), \\ J(r) &= \psi(-r) - \left(\frac{-1}{P}\right)\psi(r), \end{aligned} \tag{4}$$

so wird R reell, und J rein imaginär oder $= 0$; und man erkennt leicht, dass die Summe N sich auf Ausdrücke von der Form R oder J reducirt, je nachdem die Determinante D positiv oder negativ ist.

Aus der Definition der Function $F(x)$ folgt ferner leicht die Relation

$$F(x)\,F(-x) = F(x^2)^{\left(\frac{2}{P}\right)}; \tag{5}$$

da nun, wenn x im Innern des Kreises von 0 bis j^{-r} geht, gleichzeitig $-x$ von 0 bis $j^{-(r+4)}$, und x^2 von 0 bis j^{-2r} fortrückt, so ergiebt sich

$$\psi(r) + \psi(r+4) = \left(\frac{2}{P}\right)\psi(2r); \tag{6}$$

dieselbe Eigenschaft kommt offenbar auch den Ausdrücken R und J zu.

Die Function $F(x)$ besitzt endlich noch die folgende Eigenschaft:

$$F\left(\frac{1}{x}\right) = \theta^{\Sigma\left(\frac{s}{P}\right)s} F(x)^{\left(\frac{-1}{P}\right)}; \tag{7}$$

da nun, wenn x im Innern des Kreises von 0 bis j^{-r} geht, der reciproke Werth y ausserhalb des Kreises von ∞ bis j^r fortrückt, so folgt

$$\int_\infty^{j^r} d\log F(y) = \left(\frac{-1}{P}\right)\psi(r),$$

und hieraus ergiebt sich

$$J(r) = \int_0^\infty d\log F(z_r),$$

wo z_r im Innern des Kreises von 0 bis j^r, dann ausserhalb desselben von j^r bis ∞ geht. Die Differenz $J(r) - J(r+1)$ ist daher ein geschlossenes Integral, in welchem die Integrationsvariabele einen positiven Umlauf um diejenigen Puncte θ^s macht, die auf dem von den Puncten j^r und j^{r+1} begrenzten Octanten liegen, und folglich ist nach bekannten Sätzen der complexen Integration

$$J(r) - J(r+1) = 2\pi i \sum_r^{r+1}\left(\frac{s}{P}\right),$$

wo s alle Werthe durchläuft, die der Bedingung

$$\frac{r}{8} < \frac{s}{P} < \frac{r+1}{8}$$

genügen; hieraus ergiebt sich weiter

$$J(r) - J(r+4) = 2\pi i \sum_r^{r+4}{}'\left(\frac{s}{P}\right),$$

und ebenso, wenn r *positiv* ist,

$$J(r) - J(2r) = 2\pi i \sum_r^{2r}\left(\frac{s}{P}\right);$$

setzt man die hieraus folgenden Werthe von $J(r+4)$ und $J(2r)$ in die aus (6) abgeleitete Gleichung

$$J(r) + J(r+4) = \left(\frac{2}{P}\right) J(2r)$$

ein, so erhält man

$$\left\{2 - \left(\frac{2}{P}\right)\right\} J(r) = 2\pi i \left\{\sum_r^{r+4}\left(\frac{s}{P}\right) - \left(\frac{2}{P}\right)\sum_r^{2r}\left(\frac{s}{P}\right)\right\}.$$

Bedenkt man ferner, dass

$$\sum_4^{4+r}\left(\frac{s}{P}\right) = \left(\frac{-1}{P}\right)\sum_{4-r}^{4}\left(\frac{s}{P}\right)$$

ist, so ergiebt sich

$$\left\{2 - \left(\frac{2}{P}\right)\right\} J(0) = 2\pi i \sum_0^4\left(\frac{s}{P}\right)$$

$$\left\{2 - \left(\frac{2}{P}\right)\right\} J(2) = 2\pi i \left\{1 + \left(\frac{-1}{P}\right) - \left(\frac{2}{P}\right)\right\}\sum_2^4\left(\frac{s}{P}\right)$$

$$J(1) + \left(\frac{-1}{P}\right) J(3) = 2\pi i \left\{\sum_1^4\left(\frac{s}{P}\right) + \left(\frac{-1}{P}\right)\sum_3^4\left(\frac{s}{P}\right)\right\}.$$

Da endlich zufolge (6) und (4)

$$\psi(0) - \psi(4) = \left\{2 - \left(\frac{2}{P}\right)\right\}\psi(0),$$

$$\left\{1 - \left(\frac{-1}{P}\right)\right\}\psi(0) = J(0),$$

$$\psi(6) - \left(\frac{-1}{P}\right)\psi(2) = J(2),$$

$$\{\psi(7) - \psi(3)\} + \left(\frac{-1}{P}\right)\{\psi(5) - \psi(3)\} = J(1) + \left(\frac{-1}{P}\right) J(3)$$

ist, so wird, wenn die Determinante D *negativ*, also P im ersten und dritten Falle $\equiv 3$, im zweiten und vierten Falle $\equiv 1 \pmod{4}$ ist,

$$\text{I.}\quad N = \frac{\pi}{2\sqrt{P}} \sum_0^4 \left(\frac{s}{P}\right),$$

$$\text{II.}\quad N = \frac{\pi}{\sqrt{P}} \sum_0^2 \left(\frac{s}{P}\right),$$

$$\text{III.}\quad N = \frac{\pi}{\sqrt{2P}} \sum_1^3 \left(\frac{s}{P}\right),$$

$$\text{IV.}\quad N = \frac{\pi}{\sqrt{2P}} \left\{\sum_0^1 \left(\frac{s}{P}\right) - \sum_3^4 \left(\frac{s}{P}\right)\right\},$$

wenn man berücksichtigt, dass im zweiten und vierten Falle

$$\sum_0^4 \left(\frac{s}{P}\right) = 0$$

ist.

Für *positive* Determinanten erhält man ebenfalls Vereinfachungen durch die Betrachtung des *reellen* Ausdrucks (4)

$$\begin{aligned} R(r) &= \int_0^1 \Sigma \left(\frac{s}{P}\right) \left\{\frac{dx}{x - j^{-r}\theta^s} + \frac{dx}{x - j^r\theta^{-s}}\right\} \\ &= \Sigma \left(\frac{s}{P}\right) \log \{(j^r - \theta^s)(j^{-r} - \theta^{-s})\} \\ &= \log \left\{F(j^r)\, F(j^{-r})^{\left(\frac{-1}{P}\right)}\right\}, \end{aligned}$$

welcher zufolge (7) in den folgenden übergeht

$$R(r) = \log \{c F(j^r)^2\},$$

wo

$$c = \theta^{\Sigma b - \Sigma a} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{oder} \quad = 1$$

ist, je nachdem $P = 3$ oder von 3 verschieden ist (§. 140). Da nun zufolge (6) und (4)

$$\psi(0) - \psi(4) = \left\{2 - \left(\frac{2}{P}\right)\right\} \psi(0)$$

$$\left\{1 + \left(\frac{-1}{P}\right)\right\} \psi(0) = R(0)$$

$$\psi(6) + \left(\frac{-1}{P}\right) \psi(2) = R(2)$$

$$\psi(7) + \left(\frac{-1}{P}\right) \psi(1) = R(1)$$

$$\psi(5) + \left(\frac{-1}{P}\right) \psi(3) = R(3)$$

ist, so erhält man, weil im ersten und dritten Falle $P \equiv 1$, im zweiten und vierten Falle $P \equiv 3 \pmod{4}$ ist,

$$\text{I.} \quad N \,.\, 2\sqrt{P} = -\left\{1 - \left(\frac{2}{P}\right)\frac{1}{2}\right\} \log\{F(1)^2\}$$

$$\text{II.} \quad N \,.\, 2\sqrt{P} = -\log\{c F(i)^2\}$$

$$\text{III.} \quad N \,.\, 2\sqrt{2P} = \log\left\{\frac{F(j^3)^2}{F(j)^2}\right\}$$

$$\text{IV.} \quad N \,.\, 2\sqrt{2P} = -\log\{c^2 F(j)^2 F(j^3)^2\}.$$

§. 106.

Nachdem der Werth der unendlichen Reihe N für alle Fälle bestimmt ist, in welchen die Determinante D durch kein Quadrat (ausser 1) theilbar ist, können wir nun die Anzahl h der Classen der ursprünglichen Formen der ersten Art in geschlossener Form angeben*).

A. Für *negative* Determinanten D ist (nach §. 97)

$$h = \frac{2\sqrt{-D}}{\pi} \cdot N,$$

mit Ausnahme des Falles $D = -1$, wo der Ausdruck rechter Hand zu verdoppeln ist. Hieraus ergeben sich folgende vier Resultate

$$\text{I.} \quad D = -P \equiv 1 \pmod{4}; \quad h = \sum_0^4 \left(\frac{s}{P}\right)$$

$$\text{II.} \quad D = -P \equiv 3 \pmod{4}; \quad h = 2\sum_0^2 \left(\frac{s}{P}\right)$$

$$\text{III.} \quad D = -2P \equiv 2 \pmod{8}; \quad h = 2\sum_1^3 \left(\frac{s}{P}\right)$$

$$\text{IV.} \quad D = -2P \equiv 6 \pmod{8}; \quad h = 2\left\{\sum_0^1 \left(\frac{s}{P}\right) - \sum_3^4 \left(\frac{s}{P}\right)\right\},$$

wo die Grenzen der Summationen sich immer auf den Werth $8s:P$

*) Vergl. *Kronecker: Ueber die Anzahl der verschiedenen Classen quadratischer Formen von negativer Determinante*, Crelle's Journal LVII. Daselbst findet man für negative Determinanten wesentlich neue Formeln, welche aus der Theorie der elliptischen Functionen abgeleitet sind.

beziehen*). Aus II. und IV. sind resp. die Fälle $D = -1$ und $D = -2$ auszunehmen, in welchen $h = 1$ ist.

B. Für *positive* Determinanten D ist (nach §. 99)

$$h \log (T + U\sqrt{D}) = N \,.\, 2\sqrt{D},$$

wo T, U die kleinsten positiven ganzen Zahlen bedeuten, welche der Gleichung

$$T^2 - DU^2 = 1$$

genügen und nach der angegebenen Methode (§. 84) stets gefunden werden können. Der Werth $N \,.\, 2\sqrt{D}$ ist am Schlusse des vorigen Paragraphen bestimmt; statt der dortigen Formeln kann man auch die folgenden aus der Gleichung (2) des vorigen Paragraphen ableiten:

I. $D = P \equiv 1 \pmod{4}$

$$h \log (T + U\sqrt{P}) = -\left\{4 - 2\left(\frac{2}{P}\right)\right\} \sum_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{n}{P}\right) \log \sin \frac{n\pi}{P}$$

II. $D = P \equiv 3 \pmod{4}$

$$h \log (T + U\sqrt{P}) = -\sum_0^{4} \left(\frac{-1}{n}\right)\left(\frac{n}{P}\right) \log \sin \frac{n\pi}{4P}$$

III. $D = 2P \equiv 2 \pmod{8}$

$$h \log (T + U\sqrt{2P}) = -\sum_0^{8} \left(\frac{2}{n}\right)\left(\frac{n}{P}\right) \log \sin \frac{n\pi}{8P}$$

IV. $D = 2P \equiv 6 \pmod{8}$

$$h \log (T + U\sqrt{2P}) = -\sum_0^{8} \left(\frac{-2}{n}\right)\left(\frac{n}{P}\right) \log \sin \frac{n\pi}{8P}$$

wo n alle relativen Primzahlen zu $2P$ durchlaufen muss, für welche $n:P$ zwischen den angegebenen Summationsgrenzen liegt. Die drei letzten Fälle lassen sich in der gemeinschaftlichen Formel

$$h \log (T + U\sqrt{D}) = -\sum \left(\frac{D}{n}\right) \log \sin \frac{n\pi}{4D}$$

zusammenfassen, wo n alle zwischen 0 und $4D$ liegenden relativen Primzahlen zu $4D$ durchlaufen muss.

---

*) Umgekehrt kann man diese Formeln benutzen, um die Vertheilung der Zahlen a und b auf die acht Octanten mit Hülfe der Classenanzahlen für die Determinanten $-P$ und $-2P$ zu bestimmen (Gauss' Werke Bd. II. 1863. p. 288).

§. 107.

Betrachten wir die so gewonnenen Resultate, so zeigt sich ein wesentlicher Unterschied zwischen den positiven und negativen Determinanten. Während nämlich der Ausdruck für die Classenanzahl bei einer negativen Determinante unmittelbar die Form einer *ganzen* Zahl hat — dass dieselbe zugleich *positiv* ist, hat freilich bis jetzt noch Niemand auf elementarem Wege nachgewiesen — so ist dies keineswegs unmittelbar ersichtlich bei den Ausdrücken, welche die Classenanzahl für eine positive Determinante darstellen. Es ist nun von hohem Interesse, dass mit Hülfe eines Satzes aus der von *Gauss* *) gegründeten Theorie der *Kreistheilung* (Supplement VII.) die obigen Ausdrücke für $h \log(T + U\sqrt{D})$ wirklich stets in die Form $\log(t + u\sqrt{D})$ übergeführt werden können, wo t, u ganze Zahlen bedeuten, welche der Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$ genügen. Dies wollen wir jetzt nachweisen **).

Behalten wir die bisherigen Bezeichnungen bei, so können wir, wie im Supplement VII. gezeigt ist, stets

$$2A(x) = 2\prod(x - \theta^a) = Y(x) - i^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2}\sqrt{P}\,.\,Z(x)$$

$$2B(x) = 2\prod(x - \theta^b) = Y(x) + i^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2}\sqrt{P}\,.\,Z(x)$$

setzen, wo $\sqrt{P}$ positiv ist, und $Y(x)$, $Z(x)$ ganze Functionen von x bedeuten, deren Coefficienten ganze Zahlen sind. Zugleich ist

$$A(x)B(x) = \prod(x - \theta^s) = \frac{\prod(x^{\mu_1} - 1)}{\prod(x^{\mu_2} - 1)},$$

wo μ_1 jedes positive, μ_2 jedes negative Glied des entwickelten Productes

$$\varphi(P) = (p-1)(p'-1)(p''-1)\ldots = \Sigma\,\mu_1 - \Sigma\,\mu_2$$

bedeutet, und

$$F(x) = \prod(x - \theta^s)^{\left(\frac{s}{P}\right)} = \frac{A(x)}{B(x)}.$$

---

*) *D. A.* Sectio VII.

**) *Lejeune Dirichlet: Sur la manière de résoudre l'équation $t^2 - pu^2 = 1$ au moyen des fonctions circulaires* (Crelle's Journal XVII). Vergl. *Jacobi: Ueber die Kreistheilung und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie* (Berliner Monatsberichte 1837).

Wir wenden uns nun, indem wir die am Schlusse des §. 105 gefundenen Ausdrücke für das Product $h \log(T + U\sqrt{D}) = N . 2\sqrt{D}$ zu Grunde legen, zunächst dem Falle I. zu, in welchem $D = P \equiv 1 \pmod{4}$, und also

$$h \log(T + U\sqrt{P}) = -\left\{1 - \left(\frac{2}{P}\right)\frac{1}{2}\right\} \log \{F(1)^2\}$$

ist. Da nun

$$A(1)\,B(1) = \frac{\Pi\mu_1}{\Pi\mu_2} = P^{\varkappa}$$

ist, wo $\varkappa = 1$ oder $= 0$ ist, je nachdem P eine Primzahl oder zusammengesetzt ist (§. 138), so ergiebt sich

$$F(1) = \frac{A(1)}{B(1)} = \frac{P^{\varkappa}}{B(1)^2};$$

da ferner

$$2A(1) = y - z\sqrt{P},\quad 2B(1) = y + z\sqrt{P}$$

ist, wo die ganzen Zahlen $Y(1)$, $Z(1)$ zur Abkürzung mit y, z bezeichnet sind, so wird

$$y^2 - Pz^2 = 4P^{\varkappa},$$

und folglich muss, wenn P eine Primzahl ist, y durch P theilbar sein; mithin kann man in allen Fällen

$$y + z\sqrt{P} = (\alpha + \beta\sqrt{P})\,(\sqrt{P})^{\varkappa}$$

setzen, wo α, β ganze Zahlen bedeuten, welche der Gleichung

$$\alpha^2 - P\beta^2 = 4(-1)^{\varkappa}$$

genügen, und man erhält

$$(T + U\sqrt{P})^h = \left(\frac{\alpha + \beta\sqrt{P}}{2}\right)^{4-2\left(\frac{2}{P}\right)}.$$

Sind nun die Zahlen y, z gerade, was jedenfalls eintreten muss, wenn $P \equiv 1 \pmod{8}$ ist, so kann man $\alpha = 2\alpha'$, $\beta = 2\beta'$ setzen, wo die ganzen Zahlen α' β' der Gleichung

$$\alpha'^2 - P\beta'^2 = (-1)^{\varkappa}$$

genügen; setzt man ferner

$$(\alpha' + \beta'\sqrt{P})^{1+\varkappa} = t + u\sqrt{P},$$

so genügen die ganzen Zahlen t, u der Gleichung $t^2 - Pu^2 = 1$ und man erhält

$$(T + U\sqrt{P})^h = (t + u\sqrt{P})^{\left(2-\left(\frac{2}{P}\right)\right)(2-\varkappa)}.$$

Sind dagegen die Zahlen y, z und folglich auch α, β ungerade, was nur dann eintreten kann, wenn $P \equiv 5 \pmod{8}$ ist (z.B. wenn $P = 13$, während z.B. für $P = 37$ der frühere Fall Statt findet), so kann man

$$\left(\frac{\alpha + \beta \sqrt{P}}{2}\right)^3 = \alpha' + \beta' \sqrt{P}$$

setzen, wo α', β' ganze Zahlen sind, die der Gleichung

$$\alpha'^2 - P\beta'^2 = (-1)^{\varkappa}$$

genügen; setzt man nun wieder

$$(\alpha' + \beta' \sqrt{P})^{1+\varkappa} = t + u\sqrt{P},$$

so wird $t^2 - Pu^2 = 1$, und

$$(T + U\sqrt{P})^h = (t + u\sqrt{P})^{2-\varkappa}.$$

Es leuchtet ein, dass, wenn $P \equiv 5 \pmod{8}$ ist, der erste oder zweite Fall eintreten wird, je nachdem die Classenanzahl h durch 3 theilbar ist oder nicht (vergl. §. 99). Ebenso leicht erkennt man, dass in allen Fällen $h \equiv \varkappa \pmod{2}$, d. h. dass die Classenanzahl h ungerade oder gerade sein wird, je nachdem P eine Primzahl oder zusammengesetzt ist (vergl. §. 83. Anm.). Endlich mag noch bemerkt werden, dass die Zahlen y, z beide positiv sind; da nämlich $P \equiv 1 \pmod{4}$, so zerfallen die Zahlen a in Paare von der Form a und $-a$, ebenso die Zahlen b in Paare von der Form b und $-b$, und folglich sind $A(1)$, $B(1)$ und $A(1) + B(1) = y$ positiv; da ferner

$$\left\{2 - \left(\frac{2}{P}\right)\right\} \{\log B(1) - \log A(1)\} = h \log(T + U\sqrt{P})$$

positiv ist, weil h positiv, $T + U\sqrt{P} > 1$ ist, so muss $B(1) > A(1)$, und folglich z positiv sein: ein Resultat, das bisher auf anderm Wege noch nicht bewiesen ist.

§. 108.

Für den zweiten Fall $D = P \equiv 3 \pmod{4}$ haben wir oben das Resultat

$$h \log(T + U\sqrt{P}) = -\log\{cF(i)^2\}$$

erhalten; da nun, wenn m irgend eine ungerade Zahl bedeutet,

$$\frac{i^m - 1}{i - 1} = i^{1/4(m-1)^2}$$

ist, und da ferner

$$\Sigma\,\mu_1 - \Sigma\,\mu_2 = (p-1)\,(p'-1)\,(p''-1)\ldots$$
$$\Sigma\,\mu_1^2 - \Sigma\,\mu_2^2 = (p^2-1)\,(p'^2-1)\,(p''^2-1)\ldots$$

ist, so findet man leicht

$$A(i)\,B(i) = \frac{\Pi\,(i^{\mu_1}-1)}{\Pi\,(i^{\mu_2}-1)} = i^{\varkappa},$$

wo $\varkappa$ wieder $= 1$ oder $= 0$ ist, je nachdem P eine Primzahl oder zusammengesetzt ist. Folglich wird

$$F(i) = \frac{A(i)}{B(i)} = \frac{i^{\varkappa}}{B(i)^2},$$

und also, da $c^3 = 1$ ist,

$$(T + U\sqrt{P})^h = c^2\,(-1)^{\varkappa}\,B(i)^4.$$

Mit Ausnahme des Falles $P = 3$ ist nun (nach §. 140) $c = 1$, und

$$(-x)^{\tau}B\left(\frac{1}{x}\right) = A(x),\quad (-x)^{\tau}A\left(\frac{1}{x}\right) = B(x),$$

wo $\varphi(P) = 2\tau$ gesetzt ist, folglich

$$i^{\tau}B(i) = A(-i),\quad i^{\tau}A(i) = B(-i),$$

also auch

$$i^{\tau}\,.\,Y(i) = Y(-i),\quad i^{\tau}\,.\,iZ(i) = -\,iZ(-i);$$

berücksichtigt man nun, dass

$$i^{\tau} = -\left(\frac{2}{P}\right)i \quad \text{oder} \quad = 1$$

ist, je nachdem P eine Primzahl oder zusammengesetzt ist, so folgt hieraus, dass man

$$Y(i) = \left(1 + \left(\frac{2}{P}\right)i\right)^{\varkappa}y,\quad iZ(i) = \left(1 + \left(\frac{2}{P}\right)i\right)^{\varkappa}z,$$

also

$$2A(i) = \left(1 + \left(\frac{2}{P}\right)i\right)^{\varkappa}(y - z\sqrt{P}),\ 2B(i) = \left(1 + \left(\frac{2}{P}\right)i\right)^{\varkappa}(y + z\sqrt{P})$$

setzen kann, wo y, z ganze Zahlen bedeuten, welche der durch Multiplication entstehenden Gleichung

$$y^2 - Pz^2 = \left(\frac{2}{P^{\varkappa}}\right)2^{2-\varkappa}$$

genügen; hieraus folgt weiter, dass man

$$(y + z\sqrt{P})^{1+\varkappa} = 2(t + u\sqrt{P})$$

setzen kann, wo t, u ganze Zahlen bedeuten, welche der Gleichung $t^2 - Pu^2 = 1$ genügen. Zugleich wird

$$B(i)^{1+\varkappa} = \left(\frac{2}{P^\varkappa}\right) i^\varkappa (t + u\sqrt{P}),$$

und folglich

$$(T + U\sqrt{P})^h = (t + u\sqrt{P})^{4-2\varkappa}.$$

Wir erwähnen, dass $h \equiv 2\varkappa \pmod{4}$ ist, und dass die Zahlen y, z stets dasselbe Vorzeichen haben.

In dem bisher ausgeschlossenen Fall $P = 3$ ist $T = 2$, $U = 1$, $c = \theta$, $B(i) = i - \theta^2$, woraus leicht folgt, dass

$$\frac{1}{cF(i)^2} = c^2(-1)^\varkappa B(i)^4 = (2 + \sqrt{3})^2,$$

also $h = 2$ ist.

§. 109.

Für den dritten Fall $D = 2P \equiv 2 \pmod{8}$ haben wir oben

$$h \log(T + U\sqrt{2P}) = \log\left\{\frac{F(j^3)^2}{F(j)^2}\right\}$$

gefunden. Berücksichtigt man nun, dass, wenn m irgend eine ungerade Zahl bedeutet,

$$\frac{(j^m - 1)(j^{3m} - 1)}{(j - 1)(j^3 - 1)} = \left(\frac{-2}{m}\right)$$

ist, so findet man

$$A(j)B(j)A(j^3)B(j^3) = \frac{\Pi(j^{\mu_1} - 1)(j^{3\mu_1} - 1)}{\Pi(j^{\mu_2} - 1)(j^{3\mu_2} - 1)} = \left(\frac{-2}{P^\varkappa}\right),$$

und folglich

$$(T + U\sqrt{2P})^h = A(j^3)^4 B(j)^4,$$

wo $\varkappa$ wieder $= 1$ oder $= 0$, je nachdem P eine Primzahl oder zusammengesetzt ist. Da nun $P \equiv 1 \pmod{4}$, und also $Y(j) = j^\tau Y(j^{-1})$, $Z(j) = j^\tau Z(j^{-1})$ ist (§. 140), so kann man

$$Y(j) = j^{\frac{1}{2}\tau}\{y' + y''(j - j^3)\}, \quad Z(j) = j^{\frac{1}{2}\tau}\{z' + z''(j - j^3)\}$$

setzen, wo y', y'', z', z'' ganze Zahlen bedeuten; da ferner $j - j^3 = \sqrt{2}$ ist, so erhält man, wenn man

$$\alpha = (-1)^{\frac{1}{2}\tau}\{y'^2 - 2y''^2 - P(z'^2 - 2z''^2)\},$$
$$\beta = (-1)^{\frac{1}{2}\tau}.2(y'z'' - y''z')$$

setzt,

$$4A(j^3)B(j) = \alpha + \beta\sqrt{2P}, \quad 4A(j)B(j^3) = \alpha - \beta\sqrt{2P},$$

wo die ganzen Zahlen α, β der Gleichung

$$\alpha^2 - 2P\beta^2 = 16\left(\frac{-2}{P^\varkappa}\right)$$

genügen und folglich beide durch 4 theilbar sind. Man kann daher

$$A(j^3)B(j) = y + z\sqrt{2P}$$

setzen, wo die ganzen Zahlen y, z der Gleichung

$$y^2 - 2Pz^2 = \left(\frac{-2}{P^\varkappa}\right)$$

genügen, und es ist

$$(T + U\sqrt{2P})^h = (y + z\sqrt{2P})^4.$$

Hieraus folgt, dass $h \equiv 2 \pmod{4}$, falls P eine Primzahl von der Form $8n + 5$, sonst aber $h \equiv 0 \pmod{4}$ ist.

In dem bisher ausgeschlossenen Falle $D = 2$ war $N\sqrt{D} = \log(1 + \sqrt{2})$; da ferner $T = 3$, $U = 2$ ist, so folgt

$$h\log(3 + 2\sqrt{2}) = 2\log(1 + \sqrt{2}),$$

also $h = 1$.

§. 110.

Für den vierten Fall $D = 2P \equiv 6 \pmod{8}$ haben wir oben (§§. 105, 106) das Resultat

$$h\log(T + U\sqrt{2P}) = -\log\{c^2F(j)^2F(j^3)\}^2$$

gefunden, welches vermöge der Gleichung

$$A(j)B(j)A(j^3)B(j^3) = \left(\frac{-2}{P^\varkappa}\right)$$

in

$$(T + U\sqrt{2P})^h = c\,B(j)^4 B(j^3)^4$$

übergeht, weil $c^3 = 1$ ist. Lassen wir den Fall $P = 3$ unberücksichtigt, so ist (nach §. 140) $c = 1$, und $Y(j) = (-j)^\tau Y(j^{-1})$, $-Z(j) = (-j)^\tau Z(j^{-1})$; da ferner τ ungerade oder durch 4 theilbar ist, je nachdem $\varkappa = 1$ oder $= 0$, d. h. je nachdem P eine Primzahl oder zusammengesetzt ist, so kann man

$$Y(j) = (j^{\frac{1}{2}\tau(1+\varkappa)} - \varkappa)\,(y' + y''(j - j^3))$$
$$j^2 Z(j) = (j^{\frac{1}{2}\tau(1+\varkappa)} - \varkappa)\,(z' + z''(j - j^3))$$

setzen, wo y', y'', z', z'' ganze Zahlen bedeuten; berücksichtigt man, dass $j - j^3 = \sqrt{2}$ ist, und setzt

$$\alpha = y'^2 - Pz'^2 - 2y''^2 + 2Pz''^2$$
$$\beta = 2(y'z'' - z'y''),$$

so erhält man

$$4A(j)A(j^3) = (-j^\tau - j^{3\tau})^\varkappa (\alpha - \beta\sqrt{2P})$$
$$4B(j)B(j^3) = (-j^\tau - j^{3\tau})^\varkappa (\alpha + \beta\sqrt{2P}),$$

wo die ganzen Zahlen α, β der durch Multiplication entstehenden Gleichung

$$\alpha^2 - 2P\beta^2 = \left(\frac{-2}{P^\varkappa}\right)(-2)^{4-\varkappa}$$

genügen; man kann daher

$$(\alpha + \beta\sqrt{2P})^{1+\varkappa} = 2^{2+\varkappa}(t + u\sqrt{2P})$$

setzen, wo die ganzen Zahlen t, u der Gleichung $t^2 - 2Pu^2 = 1$ genügen; dann wird

$$B(j)^{1+\varkappa} B(j^3)^{1+\varkappa} = (-1)^\varkappa (t + u\sqrt{2P})$$

und folglich

$$(T + U\sqrt{2P})^h = (t + u\sqrt{2P})^{4-2\varkappa},$$

woraus leicht folgt, dass $h \equiv 2\varkappa \pmod{4}$ ist.

In dem ausgeschlossenen Fall $P = 3$ ist $c = \theta = \theta^4$, $T = 5$, $U = 2$, und man erhält

$$\theta B(j)B(j^3) = \theta(j - \theta^2)(j^3 - \theta^2) = -i(\sqrt{2} + \sqrt{3})$$
$$\theta^2 B(j)^2 B(j^3)^2 = -(5 + 2\sqrt{6}) = -(T + U\sqrt{2P})$$

und hieraus $h = 2$.

SUPPLEMENTE.