Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie
Autor: Dirichlet, Peter
Verlag: Vieweg
Ort: Braunschweig
Jahr: 1871
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN30976923X
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X

LOG Id: LOG_0095
LOG Titel: §. 86. Feststellung des Gebietes von Zahlen, welche durch das vollständige System ursprünglicher Formen der ersten oder zweiten Art eigentlich dargestellt werden.
LOG Typ: chapter

Fünfter Abschnitt.

Bestimmung der Anzahl der Classen, in welche die binären quadratischen Formen von gegebener Determinante zerfallen.

§. 86.

Wir schreiten nun, nachdem die elementaren Theile der Theorie der quadratischen Formen behandelt sind, zu tieferen Untersuchungen, und namentlich zur *Bestimmung der Classenanzahl der nicht äquivalenten Formen von einer gegebenen Determinante* *). Wir beschränken uns dabei auf *ursprüngliche Formen der ersten oder zweiten Art* (§. 61), ferner, wenn die Determinante *negativ* ist, auf die Formen mit *positiven äusseren Coefficienten*, da die Classenanzahl der anderen Formen offenbar genau ebenso gross ist (§. 64). Unter diesen Beschränkungen denken wir uns ein vollständiges Formensystem S der σten Art für die Determinante D gebildet (§. 59). Zur Bestimmung der Anzahl der in diesem System S enthaltenen Formen führt die Betrachtung

---

*) *G. Lejeune Dirichlet: Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres*, Crelle's Journal XIX, XXI. — Vergl. *Gauss: D. A.* Additam. ad art. 306. X, und die nachgelassenen Abhandlungen: *De nexu inter multitudinem classium in quas formae binariae secundi gradus distribuuntur earumque determinantem*; Gauss' Werke Bd. II. 1863.

und genaue Definition aller durch sie darstellbaren Zahlen. Da durch eine Form der zweiten Art nur gerade Zahlen dargestellt werden können, so bezeichnen wir, um beide Fälle zusammenzufassen, die darstellbaren Zahlen allgemein mit σm, und ausserdem beschränken wir uns auf die Betrachtung derjenigen, in welchen *m positiv, ungerade und relative Primzahl gegen die Determinante D* ist. Endlich beschränken wir uns vorläufig noch auf *eigentliche* Darstellungen, d. h. auf die Annahme, dass die beiden darstellenden Zahlen x, y relative Primzahlen sind (§. 60).

Um den Charakter dieser Zahlen m genau festzustellen, erinnern wir uns, dass die Determinante D quadratischer Rest von jeder darstellbaren Zahl σm, d. h. dass die Congruenz

$$z^2 \equiv D \pmod{\sigma m}$$

möglich ist (§. 60). Es können daher in der ungeraden Zahl m nur solche Primzahlen f aufgehen, für welche

$$\left(\frac{D}{f}\right) = 1$$

ist. Umgekehrt: enthält m nur solche Primzahlen f, und ist die Anzahl der verschiedenen unter ihnen $= \mu$ (wo der Fall $\mu = 0$ nicht ausgeschlossen bleibt), so ist D quadratischer Rest von m, also auch von σm, und die obige Congruenz hat genau 2^μ incongruente Wurzeln (§. 37). Ist n ein bestimmter Repräsentant einer bestimmten dieser Wurzeln, so können wir $n^2 - D = \sigma^2 m l$ setzen, wo l eine ganze Zahl bedeutet (denn wenn $\sigma = 2$, also $D \equiv 1 \pmod{4}$ ist, so ist n ungerade, also $n^2 - D$ durch $\sigma^2 = 4$ theilbar). Dann ist $(\sigma m, n, \sigma l)$, weil m relative Primzahl zu $2D$, eine ursprüngliche Form der σten Art von der Determinante D und folglich einer und nur einer in dem System S enthaltenen Form äquivalent*). Ist (a, b, c) diese Form des Systems, so liefert nur sie solche Darstellungen (x, y) der Zahl σm, welche zu der durch n repräsentirten Wurzel der obigen Congruenz gehören, ~~und zwar ebenso viele verschiedene~~ solche Darstellungen (x, y), als es Transformationen $\binom{x,\ \xi}{y,\ \eta}$ der Form (a, b, c) in die Form $(\sigma m, n, \sigma l)$, d. h. ebenso viele, als es Auflösungen (t, u) der unbestimmten Gleichung $t^2 - D u^2 = \sigma^2$ giebt (§§. 60, 61, 62). Den Complex aller dieser

*) Da der Coefficient σm positiv ist, so gilt dies auch für den Fall, in welchem D negativ ist, und also S nur Formen mit positiven äusseren Coefficienten enthält.