Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie
Autor: Dirichlet, Peter
Verlag: Vieweg
Ort: Braunschweig
Jahr: 1871
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN30976923X
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X

LOG Id: LOG_0096
LOG Titel: §. 87. Anzahl dieser Darstellungen für den Fall einer negativen Determinante; für den Fall einer positiven Determinante wird die Anzahl der Darstellungen dadurch auf eine endliche reducirt, ...
LOG Typ: chapter

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Darstellungen der Zahl σm, welche zu einer und derselben durch n repräsentirten Wurzel der obigen Congruenz gehören, wollen wir eine *Gruppe* von Darstellungen nennen. Den 2^μ incongruenten Wurzeln dieser Congruenz entsprechen daher 2^μ solche Gruppen von Darstellungen derselben Zahl σm durch Formen des Systemes S, und in jeder Gruppe sind ebenso viel Darstellungen enthalten, als es Auflösungen der Gleichung $t^2 - Du^2 = \sigma^2$ giebt.

Das System der Zahlen m ist nun also vollständig definirt durch die Bedingungen:

1. *m ist positiv;*
2. *m ist relative Primzahl gegen $2D$;*
3. *D ist quadratischer Rest von m.*

§. 87.

Jetzt haben wir die Darstellungen von σm, welche einer und derselben Gruppe angehören genauer zu betrachten.

Für den Fall einer *negativen* Determinante D ist die Anzahl $\varkappa$ der Auflösungen (t, u) der unbestimmten Gleichung $t^2 - Du^2 = \sigma^2$ endlich; dieselbe ist zugleich die Anzahl aller zu einer Gruppe gehörenden Darstellungen einer jeden Zahl σm; bedeutet also μ wieder die Anzahl der verschiedenen in m aufgehenden Primzahlen f, so ist 2^μ die Anzahl der Gruppen, deren jede $\varkappa$ Darstellungen enthält, und folglich ist

$$\varkappa \,.\, 2^\mu$$

die Gesammtanzahl aller Darstellungen der Zahl σm; und hierin ist (§. 62)

$$\varkappa = 2 \text{ im Allgemeinen;}$$
$$\varkappa = 4, \text{ wenn } D = -1,$$
$$\varkappa = 6, \text{ wenn } D = -3 \text{ und } \sigma = 2$$

ist.

Für den Fall einer *positiven* Determinante D dagegen ist die Anzahl der Auflösungen (t, u) der unbestimmten Gleichung $t^2 - Du^2 = \sigma^2$, und folglich auch die Anzahl der in jeder der 2^μ Gruppen enthaltenen Darstellungen der Zahl σm *unendlich gross*. Wir gehen daher zunächst darauf aus, durch neue Bedingungen, welche den darstellenden Zahlen x, y aufzuerlegen sind, aus den unendlich vielen in einer Gruppe enthaltenen Darstellungen stets *eine einzige* zu isoliren. Dazu betrachten wir die allgemeine Form aller derselben Gruppe angehörenden Darstellungen (x, y) der Zahl σm. Ist wieder (a, b, c) die Form des Systems S, mit welcher die Form $(\sigma m, n, \sigma l)$ äquivalent ist, und ist $\binom{\alpha,\ \beta}{\gamma,\ \delta}$ eine bestimmte Transformation der erstern Form in die letztere, so erhält man (nach §. 61) aus dieser einen alle anderen durch die Zusammensetzung

$$\begin{pmatrix}\lambda, & \mu \\ \nu, & \varrho\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\alpha + \mu\gamma, & \lambda\beta + \mu\delta \\ \nu\alpha + \varrho\gamma, & \nu\beta + \varrho\delta\end{pmatrix}$$

aller Substitutionen $\binom{\lambda,\ \mu}{\nu,\ \varrho}$, durch welche (a, b, c) in sich selbst übergeht, mit dieser bestimmten Substitution $\binom{\alpha,\ \beta}{\gamma,\ \delta}$. Da nun (nach §. 60) jedesmal der erste und dritte Coefficient einer solchen Substitution eine zu der Wurzel n gehörende Darstellung liefern, und da auch umgekehrt jede solche Darstellung (x, y) auf diese Weise, und zwar nur ein einziges Mal erzeugt wird, so ist die allgemeine Form aller dieser Darstellungen folgende:

$$x = \lambda\alpha + \mu\gamma, \quad y = \nu\alpha + \varrho\gamma;$$

da (α, γ) selbst eine solche Darstellung ist, so kann man sagen, dass diese beiden Gleichungen aus einer bestimmten Darstellung (α, γ) alle derselben Gruppe angehörenden Darstellungen (x, y) finden lehren. Nun war aber (§. 62)

$$\lambda = \frac{t - bu}{\sigma}, \quad \mu = -\frac{cu}{\sigma},$$

$$\nu = \frac{au}{\sigma}, \quad \varrho = \frac{t + bu}{\sigma},$$

wo (t, u) jede beliebige Auflösung der Gleichung $t^2 - Du^2 = \sigma^2$ bedeutete; folglich erhalten wir

$$x = \alpha\frac{t}{\sigma} - (b\alpha + c\gamma)\frac{u}{\sigma}, \quad y = \gamma\frac{t}{\sigma} + (a\alpha + b\gamma)\frac{u}{\sigma}.$$

Für alle diese Werthe ist daher

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \sigma m;$$

durch Multiplication mit dem ersten Coefficienten ergiebt sich wie früher

$$\sigma am = (ax + (b + \sqrt{D})y)(ax + (b - \sqrt{D})y),$$

und es tritt nun die höchst merkwürdige Erscheinung auf, dass jeder der beiden irrationalen Factoren rechter Hand eine geometrische Reihe constituirt; setzt man nämlich die vorstehenden Werthe von x, y ein, so ergiebt sich leicht

$$ax + (b + \sqrt{D})y = (a\alpha + (b + \sqrt{D})\gamma)\frac{t + u\sqrt{D}}{\sigma},$$

$$ax + (b - \sqrt{D})y = (a\alpha + (b - \sqrt{D})\gamma)\frac{t - u\sqrt{D}}{\sigma};$$

wenn man also mit T, U wie früher die kleinsten positiven Werthe von t, u bezeichnet und zur Abkürzung den positiven unechten Bruch

$$\frac{T + U\sqrt{D}}{\sigma} = \theta$$

setzt, so ist (nach §. 85)

$$ax + (b + \sqrt{D})y = \pm(a\alpha + (b + \sqrt{D})\gamma)\theta^n$$
$$ax + (b - \sqrt{D})y = \pm(a\alpha + (b - \sqrt{D})\gamma)\theta^{-n}$$

wo n eine beliebige positive oder negative ganze Zahl oder Null sein kann. Wir betrachten nur die erste dieser beiden Gleichungen, da aus ihr die zweite schon von selbst folgt. Ist nun k irgend ein von Null verschiedener reeller Zahlwerth, so leuchtet ein, dass man das Vorzeichen der rechten Seite und den Exponenten n stets und nur auf eine einzige Weise so bestimmen kann, dass der algebraische Werth von $ax + (b + \sqrt{D})y$ zwischen den Grenzen k und $k\theta$ liegt; denn nachdem das Zeichen $\pm$ so gewählt ist, dass $\pm(a\alpha + (b + \sqrt{D})\gamma)$ gleichstimmig mit k wird, giebt es nur noch ein einziges Glied der geometrischen Reihe zwischen den beiden vorgeschriebenen Grenzen, wenn man, um für jeden Fall Unbestimmtheit zu vermeiden, die eine derselben, z. B. $k\theta$, von dem Intervall ausschliesst. Durch diese Forderung für den Werth von $ax + (b + \sqrt{D})y$ ist dann aus der unendlichen Anzahl von Darstellungen (x, y) eine einzige vollständig isolirt. Es kommt jetzt nur noch darauf an, k zweckmässig zu wählen.

Dazu können wir immer voraussetzen, dass die, eine ganze Classe repräsentirende, Form (a, b, c) des Systems S einen *positiven* ersten Coefficienten a hat; denn es giebt ja in jeder Classe sogar reducirte Formen, welche diese Eigenschaft haben: Wir machen daher von jetzt ab diese Voraussetzung über die Wahl der in S enthaltenen Formen (für negative Determinanten haben wir schon früher dieselbe Forderung gemacht, um dort die eine Hälfte aller Classen ganz von der Betrachtung auszuschliessen) und müssen sie dann natürlich für alles Folgende festhalten. Dann wählen wir für k die *positive* Quadratwurzel aus σam, was gestattet ist, da wir nur die positiven darstellbaren Zahlen σm betrachten. Wir stellen also die Bedingungen

$$\sqrt{\sigma am} \leqq ax + (b + \sqrt{D})y < \theta\sqrt{\sigma am}$$

auf, um aus allen derselben Gruppe angehörigen Darstellungen von σm durch (a, b, c) eine einzige (x, y) zu isoliren. Sie lassen sich, da ihre drei Glieder positiv sind, so umformen: quadrirt man, und bedenkt, dass σam das Product aus zwei positiven irrationalen Factoren ist, so erhält man leicht durch Division

$$ax + (b - \sqrt{D})y \leqq ax + (b + \sqrt{D})y < \theta^2(ax + (b - \sqrt{D})y);$$

durch Vergleichung der beiden ersten Glieder ergiebt sich, da $\sqrt{D}$ stets *positiv* genommen wird, die Bedingung

$$y \geqq 0;$$

die beiden letzten Glieder geben durch Umstellung und Restitution des Werthes von θ die Bedingung

$$ax + by > \frac{T}{U}y.$$

Umgekehrt überzeugt man sich leicht, dass aus diesen beiden Bedingungen

$$y \geqq 0, \quad ax + by > \frac{T}{U}y$$

rückwärts die obigen ursprünglichen Isolirungsbedingungen folgen.

Ausserdem zeigt sich, was besonders zu bemerken ist, dass in Folge dieser beiden Bedingungen auch der Werth der Form $ax^2 + 2bxy + cy^2$ von selbst positiv ausfällt; denn da $T > U\sqrt{D}$ ist, so ergiebt sich durch Addition von $\pm y\sqrt{D}$ auf beiden Seiten der zweiten Bedingung, dass die beiden Factoren

$$ax + (b + \sqrt{D})y, \quad ax + (b - \sqrt{D})y$$

positiv sind, woraus dasselbe für ihr Product und also, da a positiv ist, auch für $ax^2 + 2bxy + cy^2$ folgt (für Formen von negativer Determinante versteht sich dies von selbst, da wir nur solche betrachten, deren äussere Coefficienten positiv sind).