Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie

Autor: Dirichlet, Peter

Verlag: Vieweg

Ort: Braunschweig

Jahr: 1871

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN30976923X

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN30976923X|LOG_0097

OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X

§. 88.

Mit Rücksicht auf diese letzte Bemerkung können wir nun das Vorhergehende in folgender Weise noch einmal zusammenfassen:

Es sei S ein vollständiges System ursprünglicher Formen

$$(a, b, c), \quad (a', b', c') \ldots$$

der σten Art für eine gegebene Determinante D, mit positiven ersten Coefficienten $a, a' \ldots$ Dann setze man in jede dieser Formen, z. B. (a, b, c), für die Variabeln alle ganzzahligen Werthenpaare x, y ein, welche folgenden Bedingungen genügen:

I. $\dfrac{ax^2 + 2bxy + cy^2}{\sigma}$ *ist relative Primzahl zu* $2D$;

II. *im Fall einer positiven Determinante D ist*

$$y \geqq 0, \quad ax + by > \frac{T}{U} y$$

wo T, U die kleinsten positiven der Gleichung

$$T^2 - D U^2 = \sigma^2$$

genügenden ganzen Zahlen bedeuten;

III. *x und y sind relative Primzahlen zu einander.*

Auf diese Weise werden durch die Formen S alle ganzen Zahlen σm und nur solche dargestellt, welche folgenden Bedingungen genügen:

1. *m ist positiv,*
2. *m ist relative Primzahl zu $2D$,*
3. *D ist quadratischer Rest von m,*

und die Gesammtanzahl dieser Darstellungen einer jeden solchen Zahl σm ist gleich

$$\varkappa \,.\, 2^{\mu},$$

wo μ die Anzahl der in m aufgehenden verschiedenen Primzahlen bedeutet, während $\varkappa$ von m unabhängig ist, nämlich

$$\begin{aligned} \varkappa &= 1 \text{ für positive Determinanten } D, \\ &= 4 \text{ für } D = -1, \\ &= 6 \text{ für } D = -3 \text{ und } \sigma = 2, \\ &= 2 \text{ in den übrigen Fällen.} \end{aligned}$$

Dasselbe System der unendlich vielen Zahlen m kann daher auf doppelte Art erzeugt werden, erstens durch Zusammensetzung aus den Primzahlen f, von welchen D quadratischer Rest ist, und zweitens durch die Substitution aller erlaubten Zahlenpaare x, y in die Formen des Systems S. Dieses Resultat der früheren Untersuchungen über die Aequivalenz der Formen und die Darstellbarkeit der Zahlen bildet das *Grundprincip* der folgenden Untersuchung. Wir bemerken zunächst, dass die Identität der auf die beiden verschiedenen Arten erzeugten Zahlensysteme nicht aufhören wird, wenn wir von jeder der erzeugten Zahlen eine bestimmte Function ψ nehmen, d. h. es wird wieder Identität bestehen zwischen dem Complex der Zahlen

$$\psi\left(\frac{ax^2+2bxy+cy^2}{\sigma}\right), \quad \psi\left(\frac{a'x^2+2b'xy+c'y^2}{\sigma}\right)\ldots$$

und dem System der Zahlen $\psi(m)$, vorausgesetzt, dass der einem bestimmten Individuum m entsprechende Functionswerth $\psi(m)$ genau $\varkappa \,.\, 2^\mu$ mal in den letztern Complex aufgenommen wird. Ist daher die sonst ganz beliebige Function ψ so gewählt, dass die *Summe* aller dieser Werthe eine von der Anordnung derselben unabhängige convergente Reihe bildet, so folgt aus der angegebenen Identität die *Fundamentalgleichung*

$$\Sigma\,\psi\left(\frac{ax^2+2bxy+cy^2}{\sigma}\right)+\Sigma\,\psi\left(\frac{a'x^2+2b'xy+c'y^2}{\sigma}\right)+\cdots$$
$$=\varkappa\,\Sigma\,2^\mu\,\psi(m).$$

Die linke Seite derselben besteht aus ebensoviel Hauptsummen, als das System S Formen (a, b, c), (a', b', c') ... enthält, d. h. als es Formenclassen für diese Determinante giebt. Jede Hauptsumme, wie z. B.

$$\Sigma\,\psi\left(\frac{ax^2+2bxy+cy^2}{\sigma}\right)$$

ist eine doppelt unendliche Reihe, deren Glieder den sämmtlichen durch die Bedingungen I., II., III. definirten Zahlenpaaren x, y entsprechen (die Bedingungen I. und II. sind natürlich für die folgende Hauptsumme so zu modificiren, dass (a', b', c') an die Stelle von (a, b, c) tritt). Endlich bezieht sich die rechts angedeutete Summation auf alle aus den Primzahlen f zusammengesetzten Zahlen m, und ebenso behalten μ und $\varkappa$ ihre frühere Bedeutung. Wir specialisiren nun die Function ψ so, dass wir