Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie
Autor: Dirichlet, Peter
Verlag: Vieweg
Ort: Braunschweig
Jahr: 1871
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN30976923X
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X

LOG Id: LOG_0098
LOG Titel: §. 89.   Umformung der rechten Seite
LOG Typ: chapter

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

$$\psi(z) = \frac{1}{z^s}$$

setzen, wo s ein beliebiger positiver Werth, aber > 1 ist; diese letztere Bedingung ist, wie wir später nachträglich zeigen werden, nothwendig, damit die vorstehenden unendlichen Reihen convergiren. Hierdurch geht unsere obige Gleichung in die folgende über:

$$\Sigma \left(\frac{ax^2 + 2bxy + cy^2}{\sigma}\right)^{-s} + \cdots = \varkappa \, \Sigma \frac{2^\mu}{m^s},$$

wo der Bequemlichkeit halber links nur eine einzige der den verschiedenen Formen entsprechenden Hauptsummen aufgeschrieben ist.

§. 89.

Wir beschäftigen uns nun zunächst mit einer Umformung*) der rechten Seite dieser Gleichung; zu dem Zweck betrachten wir das System

$$f_1, f_2, f_3 \ldots$$

der sämmtlichen Primzahlen f, welche nicht in $2D$ aufgehen, und von welchen D quadratischer Rest ist. Jede der oben definirten Zahlen m ist dann von der Form

$$f_1^{n_1} f_2^{n_2} f_3^{n_3} \ldots,$$

wo die Exponenten $n_1, n_2, n_3 \ldots$ positive ganze Zahlen oder Null sind, und jedes m kann auch nur auf eine einzige Weise in diese Form gebracht werden. Bilden wir nun die diesen Primzahlen entsprechenden unendlichen Reihen

$$1 + \frac{2}{f_1^s} + \frac{2}{f_1^{2s}} + \frac{2}{f_1^{3s}} + \cdots + \frac{2}{f_1^{n_1 s}} + \cdots$$

$$1 + \frac{2}{f_2^s} + \frac{2}{f_2^{2s}} + \frac{2}{f_2^{3s}} + \cdots + \frac{2}{f_2^{n_2 s}} + \cdots$$

$$1 + \frac{2}{f_3^s} + \frac{2}{f_3^{2s}} + \frac{2}{f_3^{3s}} + \cdots + \frac{2}{f_3^{n_3 s}} + \cdots \text{ u. s. w.},$$

---

*) Wir machen darauf aufmerksam, dass diese Umformung auch auf die allgemeinere Reihe $\Sigma\, 2^\mu \psi(m)$ anwendbar ist, wenn nur die Function ψ für ganze Argumente der Bedingung $\psi(z)\psi(z') = \psi(zz')$ genügt (vergl. §. 124).

so erkennt man leicht mit Berücksichtigung der eben gemachten Bemerkung, dass das Product aller dieser Reihen nichts Anderes als die Summe

$$\Sigma \frac{2^\mu}{m^s}$$

ist. Denn das Product aus beliebigen Gliedern der ersten, zweiten, dritten Reihe u. s. f. hat die Form

$$\frac{2^\mu}{(f_1^{n_1} f_2^{n_2} f_3^{n_3} \ldots)^s} = \frac{2^\mu}{m^s},$$

wo μ die Anzahl der wirklich in m aufgehenden Primzahlen f bedeutet, d. h. derjenigen, deren Exponent n von Null verschieden ist; es entsteht daher auf diese Weise wirklich jedes Glied der genannten Reihe, und jedes auch nur ein einziges Mal. Da nun andererseits

$$1 + \frac{2}{f^s} + \frac{2}{f^{2s}} + \frac{2}{f^{3s}} + \cdots + \frac{2}{f^{ns}} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{2}{f^s} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{f^s}} = \frac{1 + \frac{1}{f^s}}{1 - \frac{1}{f^s}}$$

ist, so erhalten wir folgende Gleichung

$$\Sigma \frac{2^\mu}{m^s} = \Pi \frac{1 + \frac{1}{f^s}}{1 - \frac{1}{f^s}},$$

in welcher das Productzeichen Π sich auf die sämmtlichen oben definirten Primzahlen f bezieht.

Bezeichnen wir mit q allgemein *jede positive nicht in* $2\,D$ *aufgehende Primzahl*, so leuchtet ein, dass man die vorstehende Gleichung auch in folgender Form schreiben kann:

$$\Sigma \frac{2^\mu}{m^s} = \Pi \frac{1 + \frac{1}{q^s}}{1 - \left(\frac{D}{q}\right) \frac{1}{q^s}};$$

denn so oft q nicht zu den Primzahlen f gehört, reducirt sich der entsprechende Factor des Productes auf $+1$. In der so erhaltenen

Gleichung multipliciren wir Zähler und Nenner des allgemeinen Factors zur Rechten mit $1 - q^{-s}$, wodurch derselbe gleich

$$\frac{1-\frac{1}{q^{2s}}}{\left(1-\frac{1}{q^s}\right)\left(1-\left(\frac{D}{q}\right)\frac{1}{q^s}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{1-\frac{1}{q^s}}\right)\cdot\left(\frac{1}{1-\left(\frac{D}{q}\right)\frac{1}{q^s}}\right)}{\left(\frac{1}{1-\frac{1}{q^{2s}}}\right)}$$

wird, und indem wir das unendliche Product in drei unendliche Producte zerlegen, erhalten wir

$$\Sigma \frac{2\mu}{m^s} = \frac{\Pi \frac{1}{1-\frac{1}{q^s}} \cdot \Pi \frac{1}{1-\left(\frac{D}{q}\right)\frac{1}{q^s}}}{\Pi \frac{1}{1-\frac{1}{q^{2s}}}}.$$

Jetzt können wir endlich jedes der drei rechts befindlichen Producte wieder in eine unendliche Reihe verwandeln. Da nämlich

$$\frac{1}{1-\left(\frac{D}{q}\right)\frac{1}{q^s}} = \Sigma \left(\frac{D}{q}\right)^r \frac{1}{q^{rs}} =$$

$$1 + \left(\frac{D}{q}\right)\frac{1}{q^s} + \left(\frac{D}{q}\right)^2 \frac{1}{q^{2s}} + \cdots + \left(\frac{D}{q}\right)^r \frac{1}{q^{rs}} + \cdots$$

ist, so wird, wenn man für q alle, nicht in $2D$ aufgehenden, Primzahlen

$$q_1, q_2, q_3 \ldots$$

setzt, das Product aller dieser Factoren gleich der Summe aller Glieder von der Form

$$\left(\frac{D}{q_1}\right)^{r_1}\left(\frac{D}{q_2}\right)^{r_2}\left(\frac{D}{q_3}\right)^{r_3}\cdots \frac{1}{(q_1^{r_1}\, q_2^{r_2}\, q_3^{r_3} \ldots)^s},$$

wo die Exponenten $r_1, r_2, r_3 \ldots$ alle positiven ganzen Zahlen und Null zu durchlaufen haben. Das System aller der in den Nennern unter dem Exponenten s vorkommenden Zahlen

$$q_1^{r_1}\, q_2^{r_2}\, q_3^{r_3} \ldots = n$$

besteht offenbar aus sämmtlichen *positiven ganzen Zahlen n, welche relative Primzahlen gegen $2D$ sind*; jede solche Zahl n wird einmal und auch nur einmal durch ein bestimmtes System von Expo-