nenten $r_1, r_2, r_3 \ldots$ erzeugt; gleichzeitig ist dann mit Benutzung der von *Jacobi* erweiterten Bedeutung des Legendre'schen Zeichens

$$\left(\frac{D}{q_1}\right)^{r_1}\left(\frac{D}{q_2}\right)^{r_2}\left(\frac{D}{q_3}\right)^{r_3}\cdots = \left(\frac{D}{q_1^{r_1}}\right)\left(\frac{D}{q_2^{r_2}}\right)\left(\frac{D}{q_3^{r_3}}\right)\cdots$$
$$= \left(\frac{D}{q_1^{r_1}\, q_2^{r_2}\, q_3^{r_3}\ldots}\right) = \left(\frac{D}{n}\right).$$

Hierdurch gewinnen wir also folgende Verwandlung

$$\Pi \frac{1}{1-\left(\frac{D}{q}\right)\frac{1}{q^s}} = \Sigma \left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^s},$$

wo das Summenzeichen rechts sich auf alle positiven Zahlen $n$ bezieht, die relative Primzahlen gegen $2D$ sind.

Verfährt man ganz ebenso, indem man alle die Entwickelungen

$$\frac{1}{1-\frac{1}{q^s}} = 1 + \frac{1}{q^s} + \frac{1}{q^{2s}} + \cdots + \frac{1}{q^{rs}} + \cdots$$

mit einander multiplicirt, so erhält man offenbar

$$\Pi \frac{1}{1-\frac{1}{q^s}} = \Sigma \frac{1}{n^s}$$

und folglich auch

$$\Pi \frac{1}{1-\frac{1}{q^{2s}}} = \Sigma \frac{1}{n^{2s}}.$$

Hierdurch haben wir die wichtige Umformung

$$\Sigma \frac{2^\mu}{m^s} = \frac{\Sigma \frac{1}{n^s} \times \Sigma \left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^s}}{\Sigma \frac{1}{n^{2s}}}$$

gewonnen.

## §. 90.

Wir multipliciren nun beide Seiten unserer Hauptgleichung (§. 88) mit der unendlichen Reihe

$$\Sigma \frac{1}{n^{2s}},$$

wodurch sie dem eben gewonnenen Resultat gemäss in die folgende übergeht:

$$\Sigma \frac{1}{n^{2s}} \times \Sigma \left(\frac{ax^2 + 2bxy + cy^2}{\sigma}\right)^{-s} + \cdots = \varkappa \Sigma \frac{1}{n^s} \times \Sigma \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^s}.$$

Führen wir in dem ersten Gliede links die Multiplication der beiden Summen aus, so kann das Resultat als die dreifach unendliche Reihe

$$\Sigma \left(\frac{an^2x^2 + 2bn^2xy + cn^2y^2}{\sigma}\right)^{-s}$$

geschrieben werden, in welcher für $x$, $y$ alle den früheren Bedingungen I., II., III. genügenden Werthe (§. 88), und für $n$ alle positiven relativen Primzahlen gegen $2D$ zu setzen sind. Diese Reihe kann man aber auch wieder als eine doppelt unendliche ansehen, wenn man

$$nx = x', \quad ny = y'$$

setzt; denn dann nimmt sie die Gestalt

$$\Sigma \left(\frac{ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2}{\sigma}\right)^{-s}$$

an, und es fragt sich nur, welche Bedingungen den neuen Summationsbuchstaben $x'$, $y'$ aufzuerlegen sind. Diese ergeben sich aus den Bedingungen für $x$, $y$, $n$ folgendermassen. Erstens: Da $x$, $y$ zufolge der Bedingung I. so gewählt werden müssen, dass

$$\frac{ax^2 + 2bxy + cy^2}{\sigma}$$

relative Primzahl gegen $2D$ wird, und da $n$ ebenfalls relative Primzahl gegen $2D$ ist, so gilt dasselbe von

$$\frac{ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2}{\sigma} = n^2 \cdot \frac{ax^2 + 2bxy + cy^2}{\sigma}.$$

Zweitens: für den Fall einer positiven Determinante waren $x$, $y$ den Isolirungsbedingungen II.

$$y \geqq 0, \quad ax + by > \frac{T}{U} y$$

zu unterwerfen; multiplicirt man dieselben mit $n$, so ergeben sich die ganz gleichlautenden Bedingungen

$$y' \geqq 0, \quad ax' + by' > \frac{T}{U} y'.$$

Drittens: aus der Bedingung, dass $x$, $y$ relative Primzahlen sein sollen, würde jetzt nur noch folgen, dass der grösste gemeinschaftliche Divisor $n$ von $x'$, $y'$ relative Primzahl gegen $2D$ sein muss; allein diese Bedingung kann man gänzlich fallen lassen, da sie schon in der ersten enthalten ist; denn sobald $x'$, $y'$ einen gemeinschaftlichen Divisor hätten, der nicht relative Primzahl gegen $2D$ wäre, so könnte auch

$$\frac{ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2}{\sigma}$$

nicht relative Primzahl gegen $2D$ sein.

Es zeigt sich also, dass die neuen Variabeln $x'$, $y'$ nur den beiden Bedingungen I. und II. zu unterwerfen sind, wenn man in denselben die Variabeln accentuirt, dass dagegen die Bedingung III. ganz fortgefallen ist. Umgekehrt überzeugt man sich leicht, dass ein jedes solches Werthenpaar $x'$, $y'$ einmal und nur einmal durch ein Werthenpaar $x$, $y$ und eine Zahl $n$ erzeugt wird.

Wir lassen nun der Bequemlichkeit halber die Accente der Variabeln wieder fort, und schreiben daher unsere Hauptgleichung in folgender Form *)

$$\Sigma \left(\frac{ax^2 + 2bxy + cy^2}{\sigma}\right)^{-s} + \cdots = \varkappa \, \Sigma \frac{1}{n^s} \times \Sigma \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^s},$$

wo nun in der ersten auf die Form $(a, b, c)$ bezüglichen Hauptsumme die Summationsbuchstaben nur noch den beiden folgenden Bedingungen zu unterwerfen sind:

I. Der Werth $\frac{ax^2 + 2bxy + cy^2}{\sigma}$ soll relative Primzahl gegen $2D$ sein.

II. Im Fall einer positiven Determinante soll

$$y \geqq 0, \quad ax + by > \frac{T}{U} y$$

sein, wo $T$, $U$ die frühere Bedeutung haben.

*) Auf dieselbe Weise kann auch die allgemeinere Gleichung abgeleitet werden, in welcher statt der Function $z^{-s}$ irgend eine Function $\psi(z)$ auftritt, welche der Bedingung $\psi(z)\psi(z') = \psi(zz')$ genügt, so oft $z$ und $z'$ ganze Zahlen sind.