§. 91.

Bevor wir weitergehen, wollen wir aus unserer letzten Gleichung einige interessante Folgerungen ziehen: die erste derselben ist rein zahlentheoretischer Natur und vervollständigt unsere frühere Theorie der Darstellung. Wir multipliciren die beiden unendlichen Reihen

$$\Sigma \frac{1}{n'^s}, \quad \Sigma \left(\frac{D}{n''}\right) \frac{1}{n''^s}$$

rechter Hand, nachdem wir die Summationsbuchstaben, um sie von einander zu unterscheiden, accentuirt haben; dann erhalten wir als Product die doppelt unendliche Reihe

$$\Sigma \left(\frac{D}{n''}\right) \frac{1}{(n'n'')^s},$$

in welcher sowohl n' als auch n'' das Gebiet aller Zahlen n, d. h. aller derjenigen positiven ganzen Zahlen zu durchlaufen hat, welche relative Primzahlen gegen $2D$ sind. Offenbar ist jedes Product von der Form $n'n''$ wieder in demselben Gebiet enthalten; fassen wir daher alle Glieder der Doppelsumme, in welchen das Product $n'n''$ denselben Werth n hat, immer in ein einziges zusammen, so können wir diese Doppelsumme wieder in die Form einer einfach unendlichen Reihe

$$\Sigma \frac{\tau_n}{n^s}$$

bringen; bezeichnet man mit δ die sämmtlichen Divisoren der Zahl n, so wird offenbar

$$\tau_n = \Sigma \left(\frac{D}{\delta}\right).$$

Dividiren wir ferner die Gleichung auf beiden Seiten durch σ^s, so nimmt sie folgende Form an

$$\Sigma \frac{1}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^s} + \cdots = \Sigma \frac{\varkappa \tau_n}{(\sigma n)^s}.$$

Fassen wir nun auch links alle in den verschiedenen Doppelsummen vorkommenden Glieder, welche denselben Werth haben, in ein einziges zusammen, so erhalten wir folgende Gleichung

$$\Sigma \frac{\lambda_\nu}{\nu^s} = \Sigma \frac{\varkappa \tau_n}{(\sigma n)^s},$$

wo mit ν alle die durch die sämmtlichen Formen $(a, b, c) \ldots$ des Systems S darstellbaren Zahlen bezeichnet werden, und λ_ν die Anzahl der verschiedenen Darstellungen einer solchen Zahl ν bedeutet. Hierbei ist wohl zu bemerken, dass jetzt ebensowohl uneigentliche wie eigentliche Darstellungen zugelassen werden, indem die darstellenden Zahlen x, y nur noch den Bedingungen I. und II. des vorigen Paragraphen unterworfen sind, während sie früher auch relative Primzahlen unter einander sein mussten.

Besteht nun für jeden über einer gewissen Grenze liegenden positiven Werth des Exponenten s eine Gleichung von der Form

$$\frac{\alpha}{a^s} + \frac{\beta}{b^s} + \frac{\gamma}{c^s} + \cdots = \frac{\alpha'}{a'^s} + \frac{\beta'}{b'^s} + \frac{\gamma'}{c'^s} + \cdots$$

wo $a, b, c \ldots$ sowohl wie $a', b', c' \ldots$ positive und in ihrer Aufeinanderfolge wachsende Zahlwerthe bedeuten, und sind die sämmtlichen Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma \ldots \alpha', \beta', \gamma' \ldots$ von Null verschieden, so folgt hieraus die vollständige Identität beider Reihen, d. h. es ist

$$a = a', \quad b = b', \quad c = c' \ldots$$
$$\alpha = \alpha', \quad \beta = \beta', \quad \gamma = \gamma' \ldots$$

Um dies zu beweisen, können wir annehmen, es sei $a \leqq a'$; multipliciren wir beide Seiten der Gleichung mit a^s, so erhalten wir

$$\alpha + \beta \left(\frac{a}{b}\right)^s + \gamma \left(\frac{a}{c}\right)^s + \cdots$$
$$= \alpha' \left(\frac{a}{a'}\right)^s + \beta' \left(\frac{a}{b'}\right)^s + \gamma' \left(\frac{a}{c'}\right)^s + \cdots$$

Da nun sowohl die Werthe

$$\frac{a}{b}, \frac{a}{c} \cdots$$

als auch die Werthe

$$\frac{a}{b'}, \frac{a}{c'} \cdots$$

fortwährend abnehmende echte Brüche sind, und beide Reihen convergiren, so überzeugt man sich leicht*), dass mit unbegrenzt wachsendem s die linke Seite der vorstehenden Gleichung sich dem Grenzwerth α nähert, und ebenso die rechte dem Grenzwerth α' oder 0, je nachdem $a = a'$ oder $< a'$ ist. Da nun beide Seiten

*) Vergl. Supplement IX. §. 143.

sich nothwendig demselben Grenzwerth nähern müssen, und α von Null verschieden ist, so muss $a = a'$, und folglich auch $\alpha = \alpha'$ sein. Nachdem so die Identität der ersten Glieder auf beiden Seiten bewiesen ist, kann man dieselben fortlassen; aus der so entstehenden Gleichung

$$\frac{\beta}{b^s} + \frac{\gamma}{c^s} + \cdots = \frac{\beta'}{b'^s} + \frac{\gamma'}{c'^s} + \cdots$$

folgt dann auf dieselbe Weise, dass $b = b'$ und $\beta = \beta'$ sein muss, und so kann man fortfahren.

Wendet man dies Princip auf unsere obige Gleichung an, so ergiebt sich, dass jedes σn, dem ein von Null verschiedenes τ_n entspricht, nothwendig eine Zahl ν, d. h. eine durch die Formen S darstellbare Zahl, und dass die Anzahl λ_ν der verschiedenen Darstellungen eines solchen $\nu = \sigma n$ gleich $\varkappa \tau_n$ ist; wenn dagegen $\tau_n = 0$ ist, so kann auch σn keine durch die Formen S darstellbare Zahl ν sein; wir können daher in beiden Fällen sagen: *die Anzahl aller Darstellungen einer Zahl σn durch die Formen S ist immer*

$$= \varkappa \tau_n = \varkappa \sum \left(\frac{D}{\delta}\right),$$

wo δ alle Divisoren der Zahl σn durchlaufen muss).*

Wir wollen dieses Resultat auf einige Beispiele anwenden.

1. Ist $D = -1$ (und folglich $\sigma = 1$), so ist nur eine einzige Form in dem System S enthalten, für welche wir die Form $(1, 0, 1)$ wählen können; das System der Zahlen σn ist das der positiven ungeraden Zahlen, und da $\varkappa = 4$ ist, so erhalten wir das Resultat:

Die Anzahl aller Darstellungen einer beliebigen positiven ungeraden Zahl n durch die Form $(1, 0, 1) = x^2 + y^2$ *ist gleich*

$$4 \sum (-1)^{\frac{1}{2}(\delta - 1)} = 4(M - N)$$

d. h. gleich dem vierfachen Ueberschuss der Anzahl M ihrer Divisoren δ von der Form $4h + 1$ über die Anzahl N der Divisoren δ von der Form $4h + 3$.

Die darstellenden Zahlen x, y sind gar keiner Beschränkung unterworfen; es leuchtet ferner ein, dass jedesmal acht verschiedene Darstellungen eine einzige Zerlegung in zwei Quadrate geben; nur wenn eine der beiden darstellenden Zahlen $= 0$ ist, findet eine

---

*) Vergl. §. 124.