Ausnahme Statt, weil dann nur vier verschiedene Darstellungen dieselbe Zerlegung liefern, ein Fall, der nur dann eintreten kann, wenn n eine Quadratzahl ist. Die Anzahl der verschiedenen Zerlegungen ist daher $\frac{1}{2}(M-N+1)$ oder $\frac{1}{2}(M-N)$, je nachdem n eine Quadratzahl ist oder nicht. So ist z. B.

$$\begin{aligned}
25 &= 0^2+5^2 = 3^2+4^2 \\
45 &= 3^2+6^2 \\
49 &= 0^2+7^2 \\
65 &= 1^2+8^2 = 4^2+7^2.
\end{aligned}$$

Ist endlich n eine Primzahl, so ergiebt sich wieder, dass n auf eine einzige, oder auf gar keine Weise in zwei Quadrate zerlegt werden kann, je nachdem n von der Form $4h+1$, oder von der Form $4h+3$ ist (§. 68).

2. Für die positive Determinante $D=2$ existiren nur die beiden einander äquivalenten reducirten Formen $(1, 1, -1)$ und $(-1, 1, 1)$, also nur eine einzige Classe; als repräsentirende Form kann man daher auch $(1, 0, -2) = x^2-2y^2$ wählen. Da die kleinsten der Gleichung $t^2-2u^2=1$ genügenden Zahlen $T=3$, $U=2$ sind, so werden nur solche Darstellungen betrachtet, in welchen $y \geqq 0$, $2x > 3y$ ist. Da ferner

$$\left(\frac{2}{\delta}\right) = (-1)^{1/8(\delta^2-1)} = +1 \text{ oder } = -1$$

ist, je nachdem $\delta = 8h \pm 1$ oder $\delta = 8h \pm 5$ ist, so bekommen wir folgendes Resultat:

Die Anzahl aller den obigen Bedingungen genügenden Darstellungen (x, y) einer beliebigen positiven ungeraden Zahl n durch die Form x^2-2y^2 ist gleich dem Ueberschuss der Anzahl der Divisoren von n, welche die Form $8h \pm 1$ haben, über die Anzahl der anderen Divisoren.

§. 92.

Eine zweite interessante Anwendung der vorstehenden Untersuchung machen wir auf die Analysis. Wir haben gesehen, dass durch Einsetzen aller den Bedingungen I. und II. genügenden ganzzahligen Werthenpaare x, y in die Formen $(a, b, c) \ldots$ des Systems S die Zahlen σn erzeugt werden, und zwar ist

$$\varkappa\tau_n = \varkappa\sum\left(\frac{D}{\delta}\right)$$

die Anzahl der verschiedenen Erzeugungen einer solchen Zahl σn, wenn wieder für δ alle Divisoren von n gesetzt werden. Nehmen wir daher von jeder der Zahlen $ax^2 + 2bxy + cy^2$ eine bestimmte Function ψ, so entsteht auf diese Weise jeder Werth $\psi(\sigma n)$ so oft als $\varkappa\tau_n$ angiebt. Hieraus folgt wieder, dass

$$\sum\psi(ax^2 + 2bxy + cy^2) + \cdots = \varkappa\sum\tau_n\psi(\sigma n)$$

sein wird, sobald die Function ψ so gewählt wird, dass diese unendlichen Reihen bestimmte von der Anordnung ihrer Glieder unabhängige Summen haben. Dies ist der Fall, wenn man

$$\psi(z) = q^z$$

setzt, wo q eine reelle oder complexe Grösse bedeutet, deren Modulus ein echter Bruch ist. Man erhält auf diese Weise folgende sehr allgemeine Gleichung

$$\sum q^{ax^2+2bxy+cy^2} + \cdots = \varkappa\sum\tau_n q^{\sigma n};$$

da auf der rechten Seite der Coefficient τ_n selbst wieder eine Summe ist, in welcher δ die sämmtlichen Divisoren von n zu durchlaufen hat, so kann man, indem man n in $n'\delta$ verwandelt, die Gleichung auch so schreiben

$$\sum q^{ax^2+2bxy+cy^2} + \cdots = \varkappa\sum\left(\frac{D}{\delta}\right)q^{\sigma n'\delta},$$

wo nun rechts eine Doppelsumme steht, in welcher jeder der beiden Summationsbuchstaben n' und δ das Gebiet aller Zahlen n zu durchlaufen hat.

Wir wollen die vorstehende Gleichung auf einige specielle Fälle anwenden. Nehmen wir z. B. $D = -1$, also $\sigma = 1$, so haben wir links nur eine einzige Doppelsumme; nehmen wir wieder $(1, 0, 1)$ als die repräsentirende Form, so ist dieselbe gleich

$$\sum q^{x^2+y^2},$$

worin x, y alle Werthenpaare zu durchlaufen haben, für welche $x^2 + y^2$ ungerade ausfällt; es muss daher eine der beiden Zahlen x, y ungerade, die andere gerade sein; da man nun in jeder erlaubten Combination x mit y vertauschen kann, so setzen wir fest, dass x nur die ungeraden, y nur die geraden Werthe durchlaufen soll, müssen dann aber die so beschränkte Doppelreihe mit 2 multipliciren; wir erhalten so

$$2 \sum q^{x^2+y^2} = 2 \sum q^{x^2} q^{y^2} = 2 \sum q^{x^2} \times \sum q^{y^2}$$

wo x alle positiven und negativen ungeraden, y alle positiven und negativen geraden Zahlen und Null zu durchlaufen hat; beschränken wir aber x auf alle positiven ungeraden, und y auf alle positiven geraden Zahlen, so können wir das vorstehende Product auch so schreiben

$$4 \sum q^{x^2} \times (1 + 2 \sum q^{y^2}).$$

Auf der rechten Seite haben wir (nach §. 88) die Doppelsumme

$$4 \sum \left(\frac{-1}{\delta}\right) q^{n'\delta} = 4 \sum (-1)^{\frac{1}{2}(\delta-1)} q^{n'\delta},$$

wo n' und δ alle positiven ungeraden Zahlen zu durchlaufen haben; die Summation in Bezug auf n' lässt sich ausführen, indem

$$\sum q^{n'\delta} = q^\delta + q^{3\delta} + q^{5\delta} + \cdots = \frac{q^\delta}{1 - q^{2\delta}}$$

ist; dadurch wird die rechte Seite gleich

$$4 \sum (-1)^{\frac{1}{2}(\delta-1)} \frac{q^\delta}{1 - q^{2\delta}}$$

und wir erhalten daher folgende merkwürdige Gleichung

$$(q + q^9 + q^{25} + q^{49} + \cdots)(1 + 2q^4 + 2q^{16} + 2q^{36} + \cdots)$$
$$= \frac{q}{1-q^2} - \frac{q^3}{1-q^6} + \frac{q^5}{1-q^{10}} - \frac{q^7}{1-q^{14}} + \cdots$$

welche, wie die anderen Gleichungen, welche negativen Determinanten entsprechen, auch aus der Theorie der *Elliptischen Functionen* abgeleitet werden kann *).

Für positive Determinanten fallen die entsprechenden Gleichungen weniger einfach aus, weil auf der linken Seite die Variabeln x, y immer noch der Bedingung II. unterworfen sind. Nehmen wir z. B. $D = 2$, also $\sigma = 1$, $\varkappa = 1$, so erhalten wir in ähnlicher Weise die Gleichung

$$\sum q^{x^2-2y^2} = \sum \left(\frac{2}{\delta}\right) q^{\delta n'}$$
$$= \frac{q}{1-q^2} - \frac{q^3}{1-q^6} - \frac{q^5}{1-q^{10}} + \frac{q^7}{1-q^{14}} + \cdots,$$

wo auf der linken Seite für x, y alle Werthenpaare zu setzen sind,

---

*) Man vergleiche *Jacobi: Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum* 1829 pagg. 92, 103, 184.