die den Bedingungen $y \geqq 0$, $2x > 3y$ genügen, und für welche ausserdem $x^2 - 2y^2$ und also x ungerade ist.

§. 93.

Wir kehren nun zu unserem eigentlichen Gegenstande, der weitern Behandlung der Gleichung (§. 90)

$$\Sigma \left(\frac{ax^2 + 2bxy + cy^2}{\sigma}\right)^{-s} + \cdots = \varkappa \, \Sigma \frac{1}{n^s} \times \Sigma \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^s}$$

zurück, und es wird gut sein, den Gang der Untersuchung hier mit wenigen Worten im Voraus anzugeben. Man würde auf unübersteigliche Schwierigkeiten stossen, wenn man die auf der linken Seite angedeuteten Summationen für einen beliebigen Werth von $s > 1$ wirklich ausführen wollte. Lässt man dagegen den Exponenten s immer mehr abnehmen und gegen den Werth 1 convergiren, so wird gleichzeitig jede dieser Hauptsummen über alle Grenzen wachsen, und bei näherer Betrachtung zeigt sich, dass das Product aus einer solchen Hauptsumme und aus $(s - 1)$ sich einem festen endlichen Grenzwerth L nähert, welcher nur von der allen Formen gemeinschaftlichen Determinante D abhängt, und folglich wird der Grenzwerth der ganzen mit $(s - 1)$ multiplicirten linken Seite $= hL$ sein, wenn man mit h die Anzahl der Hauptsummen, d. h. also die Anzahl der in dem Formensystem S enthaltenen Formen $(a, b, c) \ldots$ bezeichnet. Da ferner der Grenzwerth der mit $(s - 1)$ multiplicirten rechten Seite sich direct bestimmen lässt, so erhält man auf diese Weise einen Ausdruck für die Classenanzahl h, deren Bestimmung ja den Gegenstand unserer ganzen Untersuchung bildet.

Bevor wir aber dazu übergehen, diesen Grenzprocess durchzuführen, müssen wir noch einige vorläufige Fragen erörtern, deren Beantwortung für unsern Zweck durchaus erforderlich ist. Zunächst wenden wir uns dazu, die den Summationsbuchstaben x, y auferlegte Bedingung I. (§. 90) so umzuformen, dass man einen deutlichen Ueberblick über das System der ihr genügenden Werthenpaare x, y erhält. Zu dem Ende dürfen wir annehmen, dass der Repräsentant (a, b, c) einer ganzen Classe immer so gewählt ist, dass der Quotient $a : \sigma$ nicht nur, wie schon früher festgesetzt wurde, positiv, sondern auch *relative Primzahl gegen* $2D$ ist. Von der Berechtigung zu dieser Annahme wird man sich durch die folgende Betrachtung überzeugen. Ist

$$(a, b, c) = \sigma(Ax^2 + Bxy + Cy^2) = \sigma F$$

eine beliebige Form vom Theiler σ, und r irgend eine Primzahl, so kann man den beiden Variabeln x, y der Form stets solche Werthe beilegen, dass der Werth von F nicht durch r theilbar wird; denn ist eine der beiden Zahlen A, C, z. B. A, nicht durch r theilbar, so gebe man x einen durch r nicht theilbaren, y dagegen einen durch r theilbaren Werth; sind aber beide Coefficienten A, C durch r theilbar, so ist B gewiss nicht durch r theilbar, und folglich genügt es dann, x und y Werthe beizulegen, die beide nicht durch r theilbar sind. *Man kann folglich auch x und y immer so wählen, dass der Werth von F relative Primzahl gegen irgend eine vorgeschriebene Zahl k wird*; denn bezeichnet man mit r', r'', r''' ... die sämmtlichen in k aufgehenden Primzahlen, so braucht man nur zu bewirken, dass F durch keine einzige derselben theilbar wird, was nach dem eben Gesagten sich stets dadurch erreichen lässt, dass die beiden Variabeln x, y durch einige dieser Primzahlen theilbar, durch andere nicht theilbar angenommen werden — Bedingungen, die sich stets auf unendlich viele verschiedene Arten erfüllen lassen. Man kann hinzufügen, dass x, y ausserdem noch so gewählt werden können, dass der Werth von F *positiv* ausfällt; für eine negative Determinante D versteht sich dies von selbst, da wir Formen mit negativen äusseren Coefficienten ausschliessen; für eine positive Determinante braucht man, da

$$a\sigma F = (ax + by)^2 - Dy^2$$

ist, nur dafür zu sorgen, dass, je nachdem a positiv oder negativ ist, entsprechend $(ax + by)$ absolut genommen grösser oder kleiner als $y\sqrt{D}$ ausfällt, und offenbar lassen die bisher den Variabeln x, y auferlegten Bedingungen, durch einige Primzahlen theilbar, durch einige andere nicht theilbar zu sein, noch solchen Spielraum für ihr Grössenverhältniss, dass auch dieser Forderung noch auf unendlich viele verschiedene Arten genügt werden kann. Endlich können wir noch behaupten, dass für die Variabeln x, y auch solche Werthe gewählt werden können, welche unter einander *relative Primzahlen* sind und doch die übrigen Bedingungen erfüllen, dass F positiv und relative Primzahl gegen die vorgeschriebene Zahl k ist; denn haben x und y einen gemeinschaftlichen Divisor, so braucht