man sie nur durch Division von demselben zu befreien, und die Quotienten, die unter einander relative Primzahlen sind, bilden ein solches allen Anforderungen genügendes Werthenpaar.

Wir machen von der vorstehenden (auch für andere Untersuchungen nützlichen) Betrachtung eine specielle Anwendung auf den Fall, in welchem $k = 2D$ ist; wir können dann so sagen: ist (a, b, c) irgend eine Form vom Theiler σ und von der Determinante D, so kann man stets zwei relative Primzahlen α, γ von der Beschaffenheit finden, dass

$$\frac{a'}{\sigma} = \frac{a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2}{\sigma}$$

positiv und relative Primzahl gegen $2D$ wird. Da nun α, γ relative Primzahlen sind, so kann man (§. 24) irgend ein Paar von Werthen β, δ wählen, welche der Gleichung $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ genügen, und dann geht die Form (a, b, c) durch die Substitution $\binom{\alpha,\ \beta}{\gamma,\ \delta}$ in eine äquivalente Form über, deren erster Coefficient a' positiv ist und ausserdem die Eigenschaft hat, dass $a' : \sigma$ relative Primzahl gegen $2D$ ist. Und hiermit ist in der That der verlangte Nachweis geliefert, dass in jeder Formenclasse solche Repräsentanten ausgewählt werden können, welche die obige neue Bedingung erfüllen.

§. 94.

Wir nehmen daher jetzt an, dass die repräsentirende Form (a, b, c) so gewählt ist, dass $a : \sigma$ nicht nur positiv, sondern auch relative Primzahl gegen $2D$ ist, und fragen nun nach dem System aller Werthenpaare x, y, welche der Bedingung I. genügen, dass

$$\frac{ax^2 + 2bxy + cy^2}{\sigma}$$

relative Primzahl gegen $2D$ wird*). Bezeichnen wir wie früher mit Δ den absoluten Werth der Determinante D, so kann man stets

$$x = 2\Delta v + \alpha, \quad y = 2\Delta w + \gamma$$

setzen, wo α und γ irgend welche der 2Δ Zahlen

$$0, 1, 2, \ldots (2\Delta - 1),$$

---

*) Ganz ähnlich lässt sich auch der Fall behandeln, wenn (a, b, c) keine *ursprüngliche* Form ist; man kann dann gleich darauf ausgehen, die Anzahl der Classen von *beliebigem* Theiler σ zu bestimmen, und erhält auf diese Weise ebenfalls das unten (in §. 100) gewonnene Resultat.

und v und w beliebige ganze reelle Zahlen bedeuten; jede Combination zweier ganzen Zahlen x, y kann stets nur auf eine einzige Weise in diese Form gebracht werden. Da nun aus

$$x \equiv \alpha \pmod{2\Delta} \quad \text{und} \quad y \equiv \gamma \pmod{2\Delta}$$

auch

$$\frac{ax^2 + 2bxy + cy^2}{\sigma} \equiv \frac{a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2}{\sigma} \pmod{2\Delta}$$

folgt, so leuchtet ein, dass man unter den sämmtlichen $4\Delta^2$ Combinationen (α, γ) nur diejenigen zu ermitteln hat, für welche

$$\frac{a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2}{\sigma}$$

relative Primzahl gegen 2Δ wird. Die gesuchten Combinationen (x, y) vertheilen sich dann in zusammengehörige Paare von arithmetischen Reihen, deren Differenz $= 2\Delta$ ist, und deren Anfangsglieder α, γ specielle solche Combinationen sind, die dieselbe Bedingung erfüllen. Uns kommt es nun weniger darauf an, wirklich alle diese Combinationen (α, γ) genau zu definiren, als vielmehr, nur ihre *Anzahl* sicher festzustellen, weil diese allein bei dem spätern Grenzübergang eine Rolle spielt. Hierzu ist es aber nöthig verschiedene Fälle zu unterscheiden.

Erstens: $\sigma = 1$. Wir fragen nach der Anzahl der Combinationen (α, γ), für welche $a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2$ oder, da a relative Primzahl gegen 2Δ ist, für welche

$$a(a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2) = (a\alpha + b\gamma)^2 \pm \Delta\gamma^2$$

relative Primzahl gegen 2Δ wird. Setzt man zunächst für γ irgend eine der Δ geraden Zahlen

$$0, 2, 4 \ldots (2\Delta - 2),$$

so ist erforderlich und hinreichend, dass $(a\alpha + b\gamma)^2$ und folglich $(a\alpha + b\gamma)$ relative Primzahl gegen 2Δ werde; lässt man aber α das in Bezug auf den Modulus 2Δ vollständige Restsystem

$$0, 1, 2 \ldots (2\Delta - 1)$$

durchlaufen, während γ seinen Werth behält, so durchläuft (nach §. 18) der Ausdruck $(a\alpha + b\gamma)$, weil a relative Primzahl gegen den Modulus ist, ebenfalls ein vollständiges Restsystem, und folglich gehören zu jedem solchen geraden γ genau $\varphi(2\Delta)$ erlaubte Werthe von α, wo die Charakteristik φ im frühern Sinne (§. 11) gebraucht ist. Jedem der Δ ungeraden Werthe

$$1, 3 \ldots (2\Delta - 1)$$

von γ entsprechen ebenfalls $\varphi(2\Delta)$ erlaubte Werthe von α; dies leuchtet unmittelbar ein, wenn Δ gerade ist, weil die Forderung sich dann ebenfalls darauf reducirt, dass $(a\alpha + b\gamma)$ relative Primzahl gegen 2Δ werden muss. Ist aber Δ und also auch $\pm\Delta\gamma^2$ ungerade, so muss, da

$$(a\alpha + b\gamma)^2 \pm \Delta\gamma^2$$

ungerade und relative Primzahl gegen Δ werden soll, $(a\alpha + b\gamma)$ gerade und relative Primzahl gegen Δ werden, und folglich muss auch der Rest von $(a\alpha + b\gamma)$ in Bezug auf den Modul 2Δ gerade und relative Primzahl gegen Δ sein, und umgekehrt wird, sobald dies der Fall ist, die obige Forderung erfüllt sein. Durchläuft nun α alle seine 2Δ Werthe, so durchläuft der Rest von $(a\alpha + b\gamma)$ dieselben 2Δ Werthe; unter diesen sind die folgenden Δ Reste gerade

$$0, 2, 4 \ldots 2(\Delta - 1),$$

und unter diesen sind $\varphi(\Delta)$ relative Primzahlen gegen die ungerade Zahl Δ. Dies ist also die Anzahl der zu jedem ungeraden γ gehörenden erlaubten Werthe von α; da nun aber Δ ungerade, also relative Primzahl gegen 2 ist, so ist auch $\varphi(2\Delta) = \varphi(2)\varphi(\Delta) = \varphi(\Delta)$, und folglich haben wir in allen Fällen dieselbe Antwort: zu jedem geraden oder ungeraden γ gehören stets $\varphi(2\Delta)$ erlaubte Werthe von α; mithin existiren im Ganzen $2\Delta\varphi(2\Delta)$ erlaubte Combinationen (α, γ).

Zweitens: $\sigma = 2$; a und c gerade, b ungerade, und $D \equiv 1 \pmod{4}$. Es fragt sich: für wieviele Combinationen (α, γ) ist

$$\tfrac{1}{2}a\alpha^2 + b\alpha\gamma + \tfrac{1}{2}c\gamma^2$$

ungerade und relative Primzahl gegen Δ? — Wir beschränken uns zunächst darauf, die Combinationen zu bestimmen, für welche dieser Werth ungerade ausfällt. Da wir den Repräsentanten (a, b, c) so gewählt haben, dass $\frac{1}{2}a$ relative Primzahl gegen 2Δ und also auch ungerade ist, so wird

$$D = b^2 - ac \equiv 1 \quad \text{oder} \quad \equiv 5 \pmod{8},$$

je nachdem $\frac{1}{2}c$ gerade oder ungerade ist; im ersten Fall muss daher $\alpha(\frac{1}{2}a\alpha + b\gamma)$ ungerade, also α ungerade, und γ gerade sein; im zweiten Fall muss mindestens eine der beiden Zahlen α und γ ungerade sein. Die Anzahl der erlaubten Combinationen ist hierdurch im ersten Falle auf Δ^2, im zweiten auf $3\Delta^2$ herabgedrückt.

Soll nun der Werth von $\frac{1}{2}a\alpha^2 + b\alpha\gamma + \frac{1}{2}c\gamma^2$ auch relative Primzahl gegen Δ werden, so ist erforderlich und hinreichend, dass

$$(a\alpha + b\gamma)^2 \pm \Delta\gamma^2 = 2a(\tfrac{1}{2}a\alpha^2 \; + b\alpha\gamma + \tfrac{1}{2}c\alpha^2)$$

oder also $(a\alpha + b\gamma)$ relative Primzahl gegen Δ werde. Im ersten Fall, wo $D \equiv 1 \pmod{8}$ ist, dürfen für γ nur gerade, für α nur ungerade Werthe gesetzt werden. Giebt man daher γ einen bestimmten der Δ Werthe

$$0, 2, 4 \ldots (2\Delta - 2)$$

und lässt dann α die sämmtlichen Δ Werthe

$$1, 3, 5 \ldots (2\Delta - 1)$$

durchlaufen, welche offenbar in Bezug auf den Modul Δ ein vollständiges Restsystem bilden, so gilt (da a relative Primzahl gegen Δ ist) dasselbe von den Δ entsprechenden Zahlen $(a\alpha + b\gamma)$, und folglich sind unter denselben $\varphi(\Delta) = \varphi(2\Delta)$ relative Primzahlen gegen Δ. Im Ganzen giebt es daher in diesem Fall $\Delta\varphi(2\Delta)$ erlaubte Combinationen (α, γ). — Im zweiten Fall, wo $D \equiv 5 \pmod{8}$ ist, und in welchem mindestens eine der beiden Zahlen α, γ ungerade sein muss, findet man auf dieselbe Weise, dass jedem geraden Werthe von γ wieder $\varphi(\Delta) = \varphi(2\Delta)$ ungerade Werthe von α entsprechen, woraus zunächst $\Delta\varphi(2\Delta)$ zulässige Combinationen entspringen; ist aber γ ungerade, und durchläuft α seine sämmtlichen 2Δ Werthe, so durchläuft der Ausdruck $(a\alpha + b\gamma)$ zweimal dasselbe vollständige Restsystem in Bezug auf den Modulus Δ; es giebt daher immer $2\varphi(\Delta) = 2\varphi(2\Delta)$ erlaubte Werthe von α, so dass aus den Δ ungeraden Werthen von γ genau $2\Delta\varphi(2\Delta)$ erlaubte Combinationen (α, γ) entspringen. Im Ganzen giebt es daher in diesem zweiten Falle $3\Delta\varphi(2\Delta)$ erlaubte Combinationen (α, γ).

Wir können die sämmtlichen Fälle so zusammenfassen: die Anzahl der Paare von zusammengehörigen arithmetischen Reihen

$$x = 2\Delta v + \alpha, \quad y = 2\Delta w + \gamma$$

welche der Bedingung I. genügen, ist

$$= \omega . \Delta\varphi(2\Delta),$$

wo

$$\omega = 2, \text{ wenn } \sigma = 1$$

$$\omega = 1, \text{ wenn } \sigma = 2 \text{ und } D \equiv 1 \pmod{8}$$

$$\omega = 3, \text{ wenn } \sigma = 2 \text{ und } D \equiv 5 \pmod{8}$$

ist.