§. 95.

Wir kehren nun zu unserer Hauptgleichung zurück, der wir die Form

$$\varrho \sum \frac{1}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^{1+\varrho}} + \cdots = \frac{\varrho \varkappa}{\sigma^{1+\varrho}} \sum \frac{1}{n^{1+\varrho}} \sum \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^{1+\varrho}}$$

geben, indem wir $s = 1 + \varrho$ setzen, mit ϱ multipliciren und durch $\sigma^{1+\varrho}$ dividiren; lassen wir jetzt die positive Zahl ϱ unendlich klein werden, so haben wir die Grenzwerthe der einzelnen Glieder zu bestimmen, welche sich auf der linken und rechten Seite befinden. Indem wir mit der Discussion der linken Seite beginnen, wird es wieder nothwendig, den Fall einer negativen Determinante von dem einer positiven vollständig zu trennen.

Wir nehmen daher zunächst an, die Determinante D sei *negativ* $= -\varDelta$. Dann sind die Variabeln x, y in der der Form (a, b, c) entsprechenden Hauptsumme nur der Bedingung I. unterworfen, und wir haben eben gesehen, dass eine solche Hauptsumme in $\omega \varDelta \varphi(2\varDelta)$ Partialreihen zerfällt, welche den einzelnen zulässigen Combinationen (α, γ) entsprechen. Betrachten wir daher zunächst nur eine einzige solche Partialsumme

$$\varrho \sum \frac{1}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^{1+\varrho}},$$

in welcher x, y alle Werthe

$$x = 2\varDelta v + \alpha, \quad y = 2\varDelta w + \gamma$$

zu durchlaufen haben, die einer bestimmten zulässigen Combination (α, γ) und allen denkbaren ganzzahligen Werthen v, w entsprechen. Nach den in den Supplementen (II. §. 118) aufgestellten Principien ist der Grenzwerth des vorstehenden Productes identisch mit dem des Quotienten $T:t$, wo t eine über alle Grenzen wachsende positive Zahl, und T die zugehörige Anzahl der dargestellten Zahlen $ax^2 + 2bxy + cy^2$ bedeutet, welche nicht grösser als t sind, für welche also

$$a\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)^2 + 2b\frac{x}{\sqrt{t}} \cdot \frac{y}{\sqrt{t}} + c\left(\frac{y}{\sqrt{t}}\right)^2 \leqq 1$$

ist. Dieser Grenzwerth des Quotienten $T:t$ lässt sich leicht mit

Hülfe einer geometrischen Betrachtung bestimmen; setzt man nämlich

$$\frac{x}{\sqrt{t}} = \xi, \quad \frac{y}{\sqrt{t}} = \eta,$$

so ist T die Anzahl der Werthenpaare

$$\xi = \frac{2\varDelta}{\sqrt{t}} v + \frac{\alpha}{\sqrt{t}}, \quad \eta = \frac{2\varDelta}{\sqrt{t}} w + \frac{\gamma}{\sqrt{t}}, \tag{1}$$

für welche

$$a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 \leqq 1 \tag{2}$$

wird; sieht man nun ξ, η als rechtwinklige Coordinaten eines Punctes in einer Ebene an, und lässt man v und w alle ganzzahligen Werthe durchlaufen, so bilden die durch die Formeln (1) bestimmten Puncte (ξ, η) ein Gitter, welches durch die rechtwinklige Kreuzung zweier Systeme von Geraden entsteht, die den Axen parallel sind, und von denen je zwei benachbarte die constante Distanz $\delta = 2\varDelta : \sqrt{t}$ haben. Die ganze Ebene wird auf diese Weise in Quadrate von dem Flächeninhalt

$$\delta^2 = \frac{4\varDelta^2}{t}$$

zerlegt, deren Eckpuncte jene Puncte (ξ, η) sind; und folglich ist T die Anzahl derjenigen dieser Gitterpuncte (ξ, η), welche nicht ausserhalb der durch die Gleichung

$$a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 = 1 \tag{3}$$

dargestellten Curve liegen; da nun $b^2 - ac = -\varDelta$ negativ (und a positiv) ist, so ist diese Curve eine Ellipse, deren Mittelpunct mit dem Nullpunct des Coordinatensystems zusammenfällt. Nach einem ebenfalls in den Supplementen (III. §. 120) aufgestellten Hülfssatz hat folglich das Product

$$T . \delta^2 = 4\varDelta^2 . \frac{T}{t}$$

den Flächeninhalt A dieser Ellipse zum Grenzwerth, wenn t unendlich gross und also δ unendlich klein wird; es ist daher der gesuchte Grenzwerth

$$\lim \frac{T}{t} = \frac{A.}{4\varDelta^2},$$

woraus schon folgt, dass derselbe von (α, γ) unabhängig und also für jede der $\omega\varDelta\varphi(2\varDelta)$ Partialsummen, welche unsere Hauptsumme constituiren, derselbe ist. Mithin ist der Grenzwerth dieser der Form (a, b, c) entsprechenden Hauptsumme

$$\varrho \sum \frac{1}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^{1+\varrho}}$$

gleich

$$\omega \Delta \varphi (2\Delta) \cdot \frac{A}{4\Delta^2} = \frac{\omega \varphi (2\Delta)}{4\Delta} A,$$

wo A den Flächeninhalt der Ellipse (3) bezeichnet*). Um diesen zu bestimmen, transformire man die Gleichung der Ellipse durch Einführung solcher rechtwinkliger Coordinaten, welche mit den Hauptaxen der Ellipse zusammenfallen, wodurch sie die Form

$$a'\xi'^2 + c'\eta'^2 = 1$$

annehmen wird. Bekanntlich bleibt bei einer solchen orthogonalen Transformation die Determinante $b^2 - ac$ ungeändert, so dass

$$a'c' = ac - b^2 = \Delta$$

ist; andererseits sind $\sqrt{a'}$ und $\sqrt{c'}$ die reciproken Werthe der beiden Halbaxen, und folglich ist

$$A = \frac{\pi}{\sqrt{a'c'}} = \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}},$$

wo natürlich die Quadratwurzel *positiv* zu nehmen ist. Es ergiebt sich also das merkwürdige Resultat, dass dieser Flächeninhalt A, und folglich auch der obige Grenzwerth

$$\frac{\omega \pi \varphi (2\Delta)}{4\Delta\sqrt{\Delta}}$$

der auf die eine Form (a, b, c) bezüglichen Hauptsumme von den einzelnen Coefficienten a, b, c und folglich von der individuellen Natur dieser Form gänzlich unabhängig ist. Denselben Grenzwerth wird daher jede andere, einer andern Form (a', b', c') des Systems S entsprechende, Hauptsumme haben; bezeichnen wir daher mit h die Anzahl dieser einzelnen Hauptsummen auf der linken Seite unserer Gleichung, d. h. also die *Anzahl der Classen nicht äquivalenter ursprünglicher Formen der σten Art für die negative De-*

*) Daraus, dass der Quotient $T : t$ sich einem bestimmten Grenzwerth nähert, geht zufolge des in den Supplementen (II. §. 118) aufgestellten Satzes nachträglich hervor, dass die bisher betrachteten unendlichen Reihen für jeden positiven Werth von ϱ, also für alle Werthe $s > 1$ convergiren.