Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie
Autor: Dirichlet, Peter
Verlag: Vieweg
Ort: Braunschweig
Jahr: 1871
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN30976923X
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X

LOG Id: LOG_0107
LOG Titel: §. 98. Grenzwerth der linken Seite der Fundamentalgleichung für den Fall einer positiven Determinante; Ausdruck der Classenanzahl als Grenzwerth einer unendlichen Reihe.
LOG Typ: chapter

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

nante $D = -1$ nur eine einzige Classe von Formen (mit positiven äusseren Coefficienten) existirt.

Wir wollen nun mit der vorstehenden Formel für die Classenanzahl h der Formen der ersten Art die für die Anzahl h' der Formen der zweiten Art vergleichen. Wir unterscheiden zu dem Zweck die beiden Fälle, in welchen $D \equiv 1$ oder $D \equiv 5 \pmod{8}$ ist. Im ersten Fall ist $\varkappa = 2$ und $\omega = 1$, folglich

$$h' = \frac{2}{\pi}\sqrt{-D} \,.\, \lim \Sigma \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^{1+\varrho}} = h;$$

im zweiten Fall dagegen ist $\omega = 3$ und $\varkappa = 2$, also

$$h' = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{\pi}\sqrt{-D} \,.\, \lim \Sigma \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^{1+\varrho}} = \frac{1}{3} h,$$

ausgenommen den einzigen Fall $D = -3$, in welchem $\varkappa$ nicht $= 2$, sondern $= 6$, und folglich wieder

$$h' = h$$

ist. Wir können daher so zusammenfassen: es ist

$h' = h$, wenn $D \equiv 1 \pmod{8}$, und für $D = -3$;
$h' = \frac{1}{3} h$, wenn $D \equiv 5 \pmod{8}$, ausgenommen $D = -3$.

Diese Beziehungen zwischen der Anzahl der Formen der ersten und der zweiten Art hat schon *Gauss* gefunden, aber auf einem ganz andern Wege*).

§. 98.

Wir haben nun dieselbe Untersuchung für den Fall einer *positiven* Determinante $D = \varDelta$ zu wiederholen. Betrachten wir zunächst die linke Seite, so zerlegen wir wieder jede auf eine bestimmte Form (a, b, c) bezügliche Hauptsumme in $\omega \varDelta \varphi(2\varDelta)$ Partialsummen von der Form

$$\varrho \Sigma \frac{1}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^{1+\varrho}},$$

in deren jeder die Summationsbuchstaben alle Werthenpaare

$$x = 2\varDelta v + \alpha, \quad y = 2\varDelta w + \gamma \qquad (1)$$

zu durchlaufen haben, die einer bestimmten Combination (α, γ)

*) *D. A.* art. 256. VI. — Vergl. §. 151, I.

und allen ganzzahligen Werthen v, w entsprechen; jetzt aber treten ausserdem noch die Isolirungsbedingungen II. hinzu, denen gemäss

$$y \geqq 0, \quad ax + by > \frac{T}{U} y \tag{2}$$

sein soll. Diese letzteren Bedingungen haben, wie wir schon früher gesehen haben (§. 87), zur Folge, dass

$$ax + (b + \sqrt{D})y, \quad ax + (b - \sqrt{D})y,$$

und also auch

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

positive Zahlen sind, und wir können daher wieder die in den Supplementen aufgestellten Principien anwenden; bezeichnen wir mit t einen beliebigen positiven Werth und mit τ die Anzahl derjenigen in den Reihen (1) enthaltenen und zugleich den Bedingungen (2) genügenden Werthenpaare x, y, für welche

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 \leqq t \tag{3}$$

ist, so haben wir nur den Grenzwerth des Quotienten $\tau : t$ für unbegrenzt wachsende Werthe von t zu bestimmen, um dadurch zugleich den Grenzwerth der obigen Partialsumme zu finden, welche der einen Combination (α, γ) entspricht. Setzen wir wieder (indem wir $\sqrt{t}$ positiv nehmen)

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{t}}, \quad \eta = \frac{y}{\sqrt{t}},$$

und sehen wir ξ, η als rechtwinklige Coordinaten eines Punctes einer Ebene an, so ist τ die Anzahl derjenigen in der Doppelreihe

$$\xi = \frac{2\Delta}{\sqrt{t}} v + \frac{\alpha}{\sqrt{t}}, \quad \eta = \frac{2\Delta}{\sqrt{t}} w + \frac{\gamma}{\sqrt{t}}$$

enthaltenen Gitterpuncte, welche den drei Ungleichheiten

$$\eta \geqq 0, \quad a\xi + b\eta > \frac{T}{U}\eta,$$

$$a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 \leqq 1$$

Genüge leisten, d. h. welche innerhalb eines Stückes der $\xi\eta$-Ebene liegen, das zum Theil durch die Axe der ξ, zum Theil durch eine durch den Nullpunct gehende Gerade, und endlich durch eine Hyperbel begrenzt wird, die den Nullpunct zum Mittelpuncte hat. Bezeichnen wir mit B den Flächeninhalt dieses Stückes der $\xi\eta$-Ebene, so wird nach den in den Supplementen aufgestellten Principien, wenn t unendlich gross, und also die Kante $\delta = 2\Delta : \sqrt{t}$ der Gitterquadrate unendlich klein wird,

$$\lim \tau . \delta^2 = 4 \Delta^2 . \lim \frac{\tau}{t} = B,$$

also

$$\lim \frac{\tau}{t} = \frac{B}{4 \Delta^2}$$

sein. Da dieser Grenzwerth zugleich der Grenzwerth der Partialsumme ist, welche sich auf die eine Combination (α, γ) bezieht, so wird, da hierin die Werthe α, γ ganz herausgefallen sind, jede der $\omega \Delta \varphi (2 \Delta)$ Partialsummen, welche den verschiedenen Combinationen (α, γ) entsprechen, und welche zusammen die auf die Form (a, b, c) bezügliche Hauptsumme constituiren, denselben Grenzwerth haben; und mithin wird

$$\frac{\omega \varphi (2 \Delta)}{4 \Delta} B$$

der Grenzwerth der ganzen Hauptsumme

$$\varrho \sum \frac{1}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^{1+\varrho}}$$

sein. Um nun den Flächeninhalt B des durch die drei obigen Ungleichheiten definirten Hyperbelsectors zu finden, wird man am besten Polarcoordinaten r, φ einführen, indem man

$$\xi = r \cos \varphi, \quad \eta = r \sin \varphi$$

setzt, wo, wie gewöhnlich, r stets positiv und φ zwischen 0 und 2π genommen werden soll, was hinreicht, um jeden Punct (ξ, η) der Ebene einmal und nur einmal zu erzeugen. Durch diese Transformation verwandeln sich die früheren Grenzbedingungen in folgende:

$$\sin \varphi \geqq 0; \quad a \operatorname{cotang} \varphi + b > \frac{T}{U};$$

$$r^2 (a \cos \varphi^2 + 2b \cos \varphi \sin \varphi + c \sin \varphi^2) \leqq 1,$$

und wir wiederholen die frühere Bemerkung, dass für jeden, den beiden ersten Bedingungen genügenden Winkel φ die Grössen

$$a \cos \varphi + (b + \sqrt{D}) \sin \varphi, \quad a \cos \varphi + (b - \sqrt{D}) \sin \varphi,$$
$$a \cos \varphi^2 + 2b \cos \varphi \sin \varphi + c \sin \varphi^2$$

positiv sind, so dass also innerhalb des durch diese beiden ersten Bedingungen begrenzten Winkelraumes keine Asymptote, sondern nur ein endliches Stück der Hyperbel liegt, woraus schon folgt, dass der entsprechende Sector jedenfalls einen endlichen Werth hat*). Dieser wird bekanntlich durch die Formel

$$B = \int\int r\,dr\,d\varphi = \tfrac{1}{2}\int r^2 d\varphi$$

gefunden, wo nun in dem einfachen Integral rechts für r^2 der in der Peripherie der Hyperbel geltende Werth

$$r^2 = \frac{1}{a\cos\varphi^2 + 2b\cos\varphi\sin\varphi + c\sin\varphi^2}$$

$$= \frac{a}{2\sqrt{D}}\left\{\frac{1}{a\,\mathrm{cotang}\,\varphi + b - \sqrt{D}} - \frac{1}{a\,\mathrm{cotang}\,\varphi + b + \sqrt{D}}\right\}\frac{1}{\sin\varphi^2}$$

zu setzen ist; wir erhalten daher, indem wir cotang φ als neue Variabele betrachten, und

$$\frac{d\varphi}{\sin\varphi^2} = -d\,\mathrm{cotang}\,\varphi$$

setzen, das unbestimmte Integral

$$\frac{1}{2}\int r^2 d\varphi$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{D}}\int\frac{a\,d\,\mathrm{cotang}\,\varphi}{a\,\mathrm{cotang}\,\varphi + b + \sqrt{D}} - \frac{1}{4\sqrt{D}}\int\frac{a\,d\,\mathrm{cotang}\,\varphi}{a\,\mathrm{cotang}\,\varphi + b - \sqrt{D}}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{D}}\log\frac{a\,\mathrm{cotang}\,\varphi + b + \sqrt{D}}{a\,\mathrm{cotang}\,\varphi + b - \sqrt{D}};$$

diese Integration ist aber auszudehnen über alle Werthe von φ, welche einen positiven Sinus haben, also von $\varphi = 0$ ab bis zu dem Werth, wo $U(a\,\mathrm{cotang}\,\varphi + b) = T$ wird; dieser Endwerth von φ ist durch die Bedingung, dass $\sin\varphi$ positiv sein soll, vollständig bestimmt, und wir haben schon oben darauf hingewiesen, dass innerhalb dieses ganzen Winkelraums die beiden Grössen

$$a\,\mathrm{cotang}\,\varphi + b + \sqrt{D},\quad a\,\mathrm{cotang}\,\varphi + b - \sqrt{D}$$

stets das positive Zeichen behalten, so dass das obige unbestimmte Integral eine stetige reelle Function von φ ist, woraus folgt, dass wir nur die beiden Grenzen in dasselbe einzusetzen haben. Auf diese Weise erhalten wir

$$B = \frac{1}{4\sqrt{D}}\log\frac{T + U\sqrt{D}}{T - U\sqrt{D}} = \frac{1}{2\sqrt{D}}\log\frac{T + U\sqrt{D}}{\sigma}.$$

---

*) Hieraus folgt wieder nachträglich die Convergenz der bisher betrachteten Reihen für jeden positiven Werth von ϱ, d. h. für jeden Werth von $s > 1$.