Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie
Autor: Dirichlet, Peter
Verlag: Vieweg
Ort: Braunschweig
Jahr: 1871
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN30976923X
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X

LOG Id: LOG_0108
LOG Titel: §. 99. Beziehung zwischen der Classenanzahl der Formen der ersten Art und der Classenanzahl der Formen der zweiten Art für eine positive Determinante
LOG Typ: chapter

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Der Grenzwerth der auf die Form (a, b, c) bezüglichen Hauptsumme wird daher, wenn man statt $\varDelta$ wieder D schreibt, gleich

$$\frac{\omega\varphi(2D)}{8D\sqrt{D}}\log\frac{T+U\sqrt{D}}{\sigma},$$

wo, wie früher, T, U die beiden kleinsten der unbestimmten Gleichung $T^2 - DU^2 = \sigma^2$ genügenden positiven Zahlen bedeuten. Mithin zeigt sich auch hier, wie früher bei den Formen von negativer Determinante, dass der Grenzwerth einer auf eine einzelne Form (a, b, c) des Systems S bezüglichen Hauptsumme nur von der Determinante D (und der Art σ), dagegen gar nicht von dem individuellen Charakter der Form abhängt, dass er also für alle diese Formen derselbe ist. Bezeichnen wir wieder mit h die Anzahl aller in S enthaltenen Formen, d. h. die *Anzahl aller Classen ursprünglicher Formen σter Art für die positive Determinante D*, so ist daher

$$h\frac{\omega\varphi(2D)}{8D\sqrt{D}}\log\frac{T+U\sqrt{D}}{\sigma}$$

der Grenzwerth, welchem für unendlich abnehmende positive Werthe von ϱ die linke Seite unserer Hauptgleichung sich nähert. Auf der rechten Seite ist $\varkappa = 1$, ferner ebenso wie früher bei Formen von negativer Determinante

$$\lim\varrho\sum\frac{1}{n^{1+\varrho}} = \frac{\varphi(2\varDelta)}{2\varDelta} = \frac{\varphi(2D)}{2D},$$

und folglich erhalten wir durch Vergleichung beider Seiten der Hauptgleichung das Resultat

$$h = \frac{1}{\sigma\omega}\cdot\frac{4\sqrt{D}}{\log\frac{T+U\sqrt{D}}{\sigma}}\cdot\lim\sum\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^{1+\varrho}}.$$

§. 99.

Für Formen der ersten Art ist $\sigma = 1$, und $\omega = 2$ (§. 94); hieraus folgt für die Anzahl der Classen ursprünglicher Formen erster Art der Ausdruck

$$h = \frac{2\sqrt{D}}{\log(T+U\sqrt{D})}\cdot\lim\sum\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^{1+\varrho}},$$

wo T, U die kleinsten der Gleichung

$$T^2 - D U^2 = 1$$

genügenden positiven ganzen Zahlen bedeuten. Ist ferner $D \equiv 1 \pmod{4}$, so existiren auch Formen der zweiten Art, deren Anzahl wir mit h' bezeichnen wollen; es ist dann $\sigma = 2$, und $\omega = 1$ oder $= 3$ zu setzen, je nachdem $D \equiv 1 \pmod{8}$ oder $\equiv 5 \pmod{8}$ ist; wir erhalten daher, wenn wir zur Unterscheidung mit T', U' die kleinsten der unbestimmten Gleichung

$$T'^2 - D U'^2 = 4$$

genügenden ganzen positiven Zahlen bezeichnen,

$$h' = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{2\sqrt{D}}{\log\frac{1}{2}(T' + U'\sqrt{D})} \cdot \lim \Sigma \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^{1+\varrho}}.$$

Nun ist einleuchtend, dass jede Auflösung (t, u) der Gleichung $t^2 - D u^2 = 1$ durch Verdoppelung eine Auflösung $(t' = 2t, u' = 2u)$ der Gleichung $t'^2 - Du'^2 = 4$ giebt, und umgekehrt, dass man durch Halbirung jeder *geraden* Auflösung (t', u') der letztern eine Auflösung (t, u) der erstern erhält. Hieraus folgt unmittelbar, dass $(t' = 2T, u' = 2U)$ jedenfalls die kleinste gerade Auflösung der Gleichung $t'^2 - Du'^2 = 4$ ist. Ist nun zunächst $D \equiv 1 \pmod{8}$, so kann diese Gleichung überhaupt nur gerade Auflösungen haben; denn wäre eine der beiden Zahlen t', u' und folglich auch die andere ungerade, so wäre die linke Seite durch 8 theilbar, während sie doch $= 4$ sein soll; in diesem Fall ist daher

$$T' = 2T, \quad U' = 2U, \quad \frac{T' + U'\sqrt{D}}{2} = T + U\sqrt{D},$$

und da ausserdem $\omega = 1$ ist, so ergiebt sich

$$h' = h, \quad \text{wenn } D \equiv 1 \pmod{8}.$$

Im andern Fall $D \equiv 5 \pmod{8}$ kann die Regel nicht so bestimmt ausgesprochen werden, indem bei manchen dieser Determinanten die kleinste Auflösung (T', U') wieder eine gerade, bei anderen aber eine ungerade ist. Im ersten dieser beiden Fälle ist dann wieder $T' = 2T$, $U' = 2U$ und folglich, da $\omega = 3$ ist,

$$h' = \tfrac{1}{3} h, \text{ wenn } D \equiv 5 \pmod{8}, \text{ und } T', U' \text{ gerade};$$

es giebt unterhalb 200 nur 5 Determinanten, nämlich 37, 101, 141, 189, 197, für welche dieser Fall eintritt*).

*) Vergl. *Cayley: Note sur l'équation* $x^2 - Dy^2 = \pm 4$, $D \equiv 5 \pmod{8}$, Crelle's Journal LIII. p. 369. Man findet daselbst eine Tabelle, welche bis $D = 997$ reicht.

Im zweiten Falle, wenn T', U' ungerade sind, haben wir unter allen positiven Auflösungen (t', u'), welche (§. 85) aus der Formel

$$\frac{t' + u'\sqrt{D}}{2} = \left(\frac{T' + U'\sqrt{D}}{2}\right)^n$$

für positive Werthe von n entspringen, die kleinste gerade aufzusuchen. Versuchen wir daher die nächst grössere Auflösung, welche dem Exponenten $n = 2$ entspricht, so erhalten wir

$$t' = \frac{T'^2 + DU'^2}{2}, \quad u' = T'U';$$

da u' offenbar ungerade ist, so gehen wir zu dem folgenden Exponenten $n = 3$ über, um die nächst grössere Auflösung zu prüfen; da finden wir

$$t' = \frac{T'^3 + 3DT'U'^2}{4} = T'\,\frac{T'^2 + 3DU'^2}{4},$$

und da

$$T'^2 \equiv U'^2 \equiv 1 \pmod{8}, \quad 3D \equiv -1 \pmod{8}$$

ist, so folgt, dass t' und folglich auch u' gerade Zahlen werden, und also $t' = 2T$, $u' = 2U$ ist. Wir haben daher in diesem Falle

$$T + U\sqrt{D} = \left(\frac{T' + U'\sqrt{D}}{2}\right)^3$$

und

$$\log\frac{T' + U'\sqrt{D}}{2} = \tfrac{1}{3}\log(T + U\sqrt{D});$$

berücksichtigt man ferner, dass $\omega = 3$ ist, so ergiebt sich die Relation

$$h' = h, \quad \text{wenn } D \equiv 5 \pmod{8}, \quad \text{und } T', U' \text{ ungerade.}$$

Auch für positive Determinanten hat *Gauss**) ebenfalls die Relationen zwischen den Anzahlen der Formen der ersten und zweiten Art aufgestellt, für den letzten Fall aber, in welchem $D \equiv 5 \pmod{8}$ ist, in ganz anderer Form; er zeigt nämlich, dass die drei ursprünglichen Formen

$$(1, 0, -D), \left(4, 1, \frac{1-D}{4}\right), \left(4, 3, \frac{9-D}{4}\right)$$

entweder alle äquivalent sind, oder drei verschiedenen Classen angehören; und je nachdem das Erstere oder Letztere eintritt, ist $h' = h$ oder $h' = \frac{1}{3}h$.

---

*) *D. A.* art. 256. VI. — Vergl. §. 151, I.