Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie
Autor: Dirichlet, Peter
Verlag: Vieweg
Ort: Braunschweig
Jahr: 1871
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN30976923X
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X

LOG Id: LOG_0109
LOG Titel: §. 100. Reduction der Bestimmung der Classenanzahl auf den Fall, das die Determinante durch keine Quadratzahl theilbar ist.
LOG Typ: chapter

§. 100.

Nachdem wir im Vorhergehenden für alle Fälle gezeigt haben, wie die Classenanzahl der Formen zweiter Art aus der der Formen erster Art gefunden werden kann, beschränken wir die fernere Untersuchung lediglich auf die Bestimmung der letztern. Bevor wir aber dazu übergehen, können wir eine weitere Zurückführung unserer Aufgabe vornehmen, indem wir zeigen, dass man nur solche Determinanten D zu betrachten braucht, welche durch keine Quadratzahl (ausser 1) theilbar sind.

Ist D eine beliebige Determinante, so kann man immer $D = D' S^2$ setzen, wo S^2 das grösste*) in D aufgehende Quadrat, und also D' ein Product aus lauter ungleichen Primzahlen (oder auch $= -1$) ist, welches dem Zeichen nach mit D übereinstimmt; dann lässt sich die Classenanzahl der Formen von der Determinante D auf die der Formen von der Determinante D' zurückführen. Bezeichnen wir alle auf die Determinante D' bezüglichen Grössen durch beigesetzte Accente, so wollen wir zunächst die beiden Summen

$$\Sigma \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^s} \quad \text{und} \quad \Sigma \left(\frac{D'}{n'}\right) \frac{1}{n'^s}$$

mit einander vergleichen, in welchen wir der Bequemlichkeit halber s statt $1 + \varrho$ geschrieben haben. In der zweiten muss der Buchstabe n' alle positiven Zahlen durchlaufen, welche relative Primzahlen gegen $2D'$ sind. Bezeichnen wir mit q' alle positiven ungeraden nicht in D' aufgehenden, und, wie früher, mit q alle positiven ungeraden nicht in D aufgehenden Primzahlen, so ist, wie wir früher gesehen haben,

$$\Sigma \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^s} = \Pi \frac{1}{1 - \left(\frac{D}{q}\right) \frac{1}{q^s}}$$

und natürlich ebenso

$$\Sigma \left(\frac{D'}{n'}\right) \frac{1}{n'^s} = \Pi \frac{1}{1 - \left(\frac{D'}{q'}\right) \frac{1}{q'^s}}.$$

*) Die folgende Untersuchung gilt auch für den Fall, dass D' selbst noch quadratische Factoren hat.

Offenbar bildet nun das System der Primzahlen q nur einen Theil der Primzahlen q', denn eine in $D = D'S^2$ nicht aufgehende Primzahl q geht auch nicht in D' auf und ist folglich eine der Primzahlen q'. Das System der Primzahlen q' besteht daher aus dem der Primzahlen q und aus solchen ungeraden Primzahlen r, welche nicht in D', wohl aber in D, also auch in S aufgehen, und deren Anzahl offenbar endlich ist. Das auf die Determinante D' bezügliche unendliche Product wird sich daher in folgender Weise zerlegen

$$\Pi \frac{1}{1-\left(\frac{D'}{q'}\right)\frac{1}{q'^s}} = \Pi \frac{1}{1-\left(\frac{D'}{q}\right)\frac{1}{q^s}} \cdot \Pi \frac{1}{1-\left(\frac{D'}{r}\right)\frac{1}{r^s}};$$

da nun ferner $D = D'S^2$ und folglich

$$\left(\frac{D}{q}\right) = \left(\frac{D'S^2}{q}\right) = \left(\frac{D'}{q}\right)$$

ist, so erhalten wir, indem wir statt der beiden unendlichen Producte wieder die unendlichen Reihen aufschreiben, das Resultat

$$\Sigma \left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^s} = \Sigma \left(\frac{D'}{n'}\right)\frac{1}{n'^s} \cdot \Pi \left(1-\left(\frac{D'}{r}\right)\frac{1}{r^s}\right)$$

und hieraus

$$\lim \Sigma \left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^{1+\varrho}} = \Pi \left(1-\left(\frac{D'}{r}\right)\frac{1}{r}\right) \lim \Sigma \left(\frac{D'}{n'}\right)\frac{1}{n'^{1+\varrho}},$$

wo also das Productzeichen sich auf alle ungeraden in S, aber nicht in D' aufgehenden Primzahlen r bezieht.

Nachdem wir so für positive wie negative Determinanten das Verhältniss zwischen den beiden analogen Grenzwerthen bestimmt haben, die als Factoren in den Classenanzahlen h und h' für die Determinanten D und D' auftreten, müssen wir wieder die beiden Hauptfälle von einander trennen.

Ist zunächst D' und folglich auch D *negativ*, so haben wir (da wir uns auf Formen der ersten Art beschränken)

$$h = \frac{2\sqrt{-D}}{\pi} \lim \Sigma \left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^{1+\varrho}}$$

und, den einzigen Fall ausgenommen, in welchem $D' = -1$,

$$h' = \frac{2\sqrt{-D'}}{\pi} \lim \Sigma \left(\frac{D'}{n'}\right)\frac{1}{n'^{1+\varrho}}.$$

Mit Ausnahme des Falles $D' = -1$ ist daher, mit Rücksicht auf das eben gefundene Verhältniss der beiden Grenzwerthe der unendlichen Reihen,

$$h = h' \times S \,.\, \Pi\left(1 - \left(\frac{D'}{r}\right)\frac{1}{r}\right);$$

ist aber $D' = -1$, also $\varkappa' = 4$, $h' = 1$, und $D = -S^2$ nicht ebenfalls $= -1$, also $S > 1$, so ist die Classenanzahl für eine solche Determinante D gleich

$$\tfrac{1}{2} S\, \Pi\left(1 - \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(r-1)}}{r}\right).$$

Für *positive* Determinanten haben wir folgende Formeln erhalten:

$$h = \frac{2\sqrt{D}}{\log(T + U\sqrt{D})} \lim \Sigma \left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^{1+\varrho}}$$

$$h' = \frac{2\sqrt{D'}}{\log(T' + U'\sqrt{D'})} \lim \Sigma \left(\frac{D'}{n'}\right)\frac{1}{n'^{1+\varrho}}$$

wo T', U' die kleinsten positiven Zahlen bedeuten, die der Gleichung $T'^2 - D'U'^2 = 1$ genügen; hieraus ergiebt sich

$$h = h' \frac{\log(T' + U'\sqrt{D'})}{\log(T + U\sqrt{D})} \times S \,.\, \Pi\left(1 - \left(\frac{D'}{r}\right)\frac{1}{r}\right),$$

und es kommt nur noch darauf an, das Verhältniss der beiden Logarithmen in rationaler Form anzugeben. Offenbar liefert nun jede Lösung (t, u) der Gleichung

$$t^2 - Du^2 = 1, \quad \text{d. h.} \quad t^2 - D'S^2u^2 = 1$$

eine Lösung der Gleichung

$$t'^2 - D'u'^2 = 1,$$

in welcher

$$t' = t, \quad u' = Su,$$

also das zweite Element u' durch S theilbar ist; und umgekehrt, sobald in der Lösung (t', u') das zweite Element u' durch S theilbar ist, so erhält man hieraus eine Lösung der erstern. Hieraus folgt, dass die beiden Zahlen

$$t' = T, \quad u' = SU$$

die kleinste positive Lösung der zweiten Gleichung bilden, in welcher das zweite Element durch S theilbar ist; man kann daher

$$T + SU\sqrt{D'} = T + U\sqrt{D} = (T' + U'\sqrt{D'})^\lambda$$

setzen, wo λ der kleinste positive ganze Exponent ist, für welchen der irrationale Bestandtheil der Potenz einen durch S theilbaren Coefficienten erhält; und dann ist