Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie

Autor: Dirichlet, Peter

Verlag: Vieweg

Ort: Braunschweig

Jahr: 1871

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN30976923X

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN30976923X|LOG_0110

OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X

$$h = h' \times \frac{1}{\lambda} \cdot S \cdot \Pi \left(1 - \left(\frac{D'}{r}\right) \frac{1}{r}\right).$$

Setzt man, wie früher,

$$(T' + U' \sqrt{D'})^\nu = t'_\nu + u'_\nu \sqrt{D'},$$

so lässt sich der Werth von λ unmittelbar angeben, wenn für jede einzelne in S aufgehende Primzahl p die kleinste Zahl ν bekannt ist, für welche u'_ν durch p theilbar, und zugleich die höchste Potenz von p gegeben ist, welche dann in u'_ν aufgeht *); doch gehen wir hierauf nicht weiter ein, da der Hauptzweck, das Verhältniss zwischen den Classenanzahlen h und h' für die Determinanten D und D' zu finden, erreicht ist.

Dieselbe Aufgabe ist, wenigstens für negative Determinanten, auch schon von *Gauss* vollständig gelöst **).

§. 101.

In Folge der vorhergehenden Untersuchungen können wir uns auf den Fall beschränken, in welchem die Determinante D durch kein Quadrat ausser 1 theilbar ist, und es bleibt nur noch übrig, den Grenzwerth der unendlichen Reihe

$$\Sigma \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^{1+\varrho}}$$

für unendlich abnehmende positive Werthe von ϱ wirklich zu bestimmen.

So lange ϱ positiv bleibt, ist diese Reihe immer convergent, und zwar ist ihre Summe durchaus unabhängig von der Ordnung, in welcher man ihre Glieder auf einander folgen lässt; ist aber $\varrho = 0$, so gehört diese Reihe zu der Classe derjenigen, in welcher die Summe der positiven Glieder für sich, so wie die der negativen Glieder für sich genommen unendlich gross ist. Da nun unter der Summe einer unendlichen convergirenden Reihe stets der Grenzwerth verstanden wird, welchem sich die Summe ihrer *ersten* n Glieder nähert, wenn die Gliederanzahl n unbegrenzt wächst, so sieht man

---

*) *Dirichlet: Ueber eine Eigenschaft der quadratischen Formen von positiver Determinante* (Crelle's Journal LIII).

**) *D. A.* art. 256. V. — Vergl. §. 151, II. — Die obigen Sätze sind auf anderm Wege auch von *Lipschitz* bewiesen (Crelle's Journal LIII).

leicht ein, dass bei einer unendlichen Reihe von dieser eigenthümlichen Beschaffenheit erst dann von ihrer Convergenz und von ihrer Summe die Rede sein kann, nachdem ihre sämmtlichen Glieder in eine bestimmte *Ordnung* gebracht sind, nach welcher eines auf das andere folgt; denn die Summe, wenn sie überhaupt existirt, hängt wesentlich von der Compensation ab, welche zwischen den für sich allein unendlich wachsenden positiven und negativen Bestandtheilen gerade durch diese Anordnung der Glieder hervorgebracht wird. Eine solche unendliche Reihe hat daher ganz verschiedene Summen, je nach der verschiedenen Anordnung der Glieder. Aber gesetzt auch, dies wäre gar nicht der Fall, sondern die Reihe hätte auch für den Werth $\varrho = 0$ einen vollständig bestimmten Werth, so würde sich immer noch fragen, ob dieser Werth auch der Grenzwerth ist, welchem sich der Werth der Reihe unendlich nähert, wenn ϱ unendlich klein wird, d. h. es würde sich fragen, ob der Werth der unendlichen Reihe sich an der Stelle $\varrho = 0$ *stetig* mit ϱ ändert.

Ueber alle diese Zweifel entscheidet nun der folgende allgemeine Satz*): *Sind $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ unendlich viele Constanten von der Beschaffenheit, dass die Summe*

$$\beta_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n,$$

wie gross auch n werden mag, ihrem absoluten Werth nach stets kleiner bleibt als eine feste Constante C, so convergirt die unendliche Reihe

$$\frac{\alpha_1}{1^s} + \frac{\alpha_2}{2^s} + \frac{\alpha_3}{3^s} + \cdots + \frac{\alpha_m}{m^s} + \cdots$$

für jeden positiven Werth des Exponenten s (excl. $s = 0$) und ist zugleich eine stetige Function von s.

Um dies zu beweisen, vergleichen wir die vorstehende Reihe mit der folgenden

$$\beta_1 \left(\frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s}\right) + \beta_2 \left(\frac{1}{2^s} - \frac{1}{3^s}\right) + \beta_3 \left(\frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s}\right) + \cdots$$

Die Summen der ersten n Glieder der erstern und letztern Reihe unterscheiden sich von einander nur um

$$\frac{\beta_n}{(n+1)^s};$$

da nun der Voraussetzung nach β_n seinem absoluten Werth nach

*) *Dirichlet: Recherches etc.* §. 1. — Vergl. §. 143.

stets unterhalb der endlichen Grösse C bleibt, und s positiv ist, so wird dieser Unterschied mit unbegrenzt wachsendem n unendlich klein werden. Nähert sich daher die Summe der ersten n Glieder der einen Reihe einem bestimmten Grenzwerth, d. h. convergirt die eine Reihe, so ist dies auch mit der andern der Fall, und zwar hat sie dieselbe Summe. Wir brauchen daher die obigen Behauptungen nur für die letztere Reihe zu beweisen; dazu betrachten wir die Summe von beliebig vielen Gliedern, welche auf die ersten n Glieder folgen:

$$\beta_{n+1}\left(\frac{1}{(n+1)^s}-\frac{1}{(n+2)^s}\right)+\cdots$$
$$+\beta_{n+m}\left(\frac{1}{(n+m)^s}-\frac{1}{(n+m+1)_s}\right);$$

da die Differenzen

$$\frac{1}{(n+1)^s}-\frac{1}{(n+2)^s},\quad \frac{1}{(n+2)^s}-\frac{1}{(n+3)^s}\cdots$$

sämmtlich positiv sind, und ihre Coefficienten

$$\beta_{n+1},\quad \beta_{n+2}\cdots$$

absolut genommen sämmtlich kleiner als C sind, so ist die Summe dieser m Glieder absolut genommen auch kleiner als das Product aus C und der Summe jener m Differenzen, d. h. kleiner als

$$C\left(\frac{1}{(n+1)^s}-\frac{1}{(n+m+1)^s}\right)$$

und folglich auch kleiner als

$$\frac{C}{(n+1)^s}<\frac{C}{n^s};$$

die Summe dieser m Glieder der Reihe kann daher, wie gross ihre Anzahl m auch genommen werden mag, durch hinreichend grosse Werthe von n kleiner gemacht werden, als jeder vorher vorgeschriebene noch so kleine Werth. Das Stattfinden dieser Erscheinung ist aber bekanntlich nicht nur ein erforderliches, sondern auch ein ausreichendes Kennzeichen für die Convergenz einer jeden unendlichen Reihe.

Nachdem so für jeden positiven Werth von s die Convergenz der Reihe gezeigt ist, haben wir noch zu beweisen, dass der Werth der Reihe sich stetig mit s ändert; wir weisen dies nach für das Gebiet aller positiven Werthe von s, die grösser sind als ein bestimmter positiver Werth σ; da man nämlich, wie klein ein von

Null verschiedener positiver Werth s auch sein mag, immer noch einen positiven Werth σ angeben kann, welcher unterhalb s liegt, so wird der Beweis dann wirklich für alle positiven Werthe s (excl. $s = 0$) gelten. Nun können wir die ganze Reihe als aus zwei Theilen bestehend ansehen, deren erster die Summe ihrer ersten n Glieder

$$\beta_1\left(\frac{1}{1^s}-\frac{1}{2^s}\right)+\cdots+\beta_n\left(\frac{1}{n^s}-\frac{1}{(n+1)^s}\right),$$

also eine stetige Function von s ist, während der zweite, wie im Vorhergehenden bewiesen ist, sicher

$$< \frac{C}{n^s} \text{ und also auch } < \frac{C}{n^\sigma}$$

ist; dieser letztere Theil kann also durch die Wahl eines hinreichend grossen Werthes von n, d. h. durch eine zweckmässige Zerlegung der ganzen Reihe, kleiner gemacht werden, als irgend ein vorgeschriebener Werth; und zwar wird, was besonders wichtig ist, für *alle* Werthe von $s > \sigma$ dies durch einen und denselben Werth von n, d. h. durch eine und dieselbe Zerlegung der unendlichen Reihe bewirkt werden. Da nun der erste Bestandtheil stetig ist, so kann eine etwaige Unstetigkeit des Ganzen nur von einer Unstetigkeit des zweiten Bestandtheils herrühren, und folglich muss, da dieser zweite Theil für alle in Betracht kommenden Werthe von s absolut genommen $< Cn^{-\sigma}$ ist, die Grösse einer plötzlichen Werthänderung beim Durchlaufen eines bestimmten Werthes von s jedenfalls $< 2\,Cn^{-\sigma}$ sein. Da wir aber durch zweckmässige Wahl von n diesen Werth beliebig klein machen können, so folgt, dass gar keine Unstetigkeit vorkommen kann; denn fände wirklich ein Sprung um eine Grösse μ Statt, so nehme man n so gross, dass $2\,Cn^{-\sigma} < \mu$ wird, so ergiebt sich augenblicklich der Widerspruch.

Nachdem so der obige Satz vollständig bewiesen ist, wenden wir ihn auf unsere Reihe

$$\Sigma\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^{1+\varrho}}$$

an, in welcher die Glieder von jetzt ab stets *so geordnet* werden sollen, dass die Zahl *n beständig wächst.* Unter *dieser* Voraussetzung erkennt man leicht, dass diese Reihe einen speciellen Fall der in dem vorstehenden Satze untersuchten Reihe bildet; setzt man nämlich