

## Werk

**Titel:** Vorlesungen über Zahlentheorie

**Autor:** Dirichlet, Peter

**Verlag:** Vieweg

**Ort:** Braunschweig

**Jahr:** 1871

**Kollektion:** Mathematica

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN30976923X

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X>

**LOG Id:** LOG\_0111

**LOG Titel:** S. 102. Besondere Behandlung des ersten Hauptfalls, in welchem die Determinante die Form  $4n + 1$  hat.

**LOG Typ:** chapter

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

$$\alpha_m = \left(\frac{D}{m}\right) \text{ oder } = 0,$$

je nachdem  $m$  relative Primzahl zu  $2D$  (also eine Zahl  $n$ ) ist oder nicht, und lässt  $m$  ein vollständiges Restsystem (mod.  $4D$ ) durchlaufen, so ist die Summe der entsprechenden Coefficienten  $\alpha_m$  stets  $= 0$ , weil diese Coefficienten  $\alpha_m$  theils selbst  $= 0$  sind und die übrigen, wie eine frühere Untersuchung (§. 52) ergeben hat, zur Hälfte den Werth  $+ 1$ , zur andern Hälfte den Werth  $- 1$  besitzen. Hieraus folgt unmittelbar, dass die Summe von noch so vielen auf einander folgenden Coefficienten  $\alpha_m$  stets unterhalb einer endlichen Grösse ( $\pm 2D$ ) bleibt. Mithin ist die in der oben angegebenen Art geordnete Reihe

$$\sum \frac{\alpha_m}{m^s} = \sum \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^s}$$

convergent, so lange  $s$  positiv bleibt, und zugleich eine stetige Function von  $s$ ; und folglich wird, wenn  $\rho$  unendlich klein wird,

$$\lim \sum \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^{1+\rho}} = \sum \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n},$$

wo, wie wir nochmals hervorheben, die Glieder der Reihe *so geordnet* sind, dass  $n$  *beständig wächst*.

§. 102.

Es ist nun zweckmässig, bei der Bestimmung der Summe der unendlichen Reihe

$$N = \sum \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n}$$

dieselben vier Fälle zu unterscheiden, welche wir früher (§. 52) aufgestellt haben. Wir wenden uns zunächst zu dem Fall, in welchem

$$D = \pm P \equiv 1 \pmod{4}, \text{ also } \left(\frac{D}{n}\right) = \left(\frac{n}{P}\right)$$

ist, wo  $P$  den absoluten Werth von  $D$  bedeutet, und also eine positive ungerade, durch kein Quadrat theilbare Zahl und  $> 1$  ist. Dann lässt sich die Reihe

$$N = \sum \left(\frac{n}{P}\right) \frac{1}{n}$$

leicht auf die Reihe

$$M = \Sigma \left( \frac{m}{P} \right) \frac{1}{m}$$

zurückführen, in welcher  $m$  beständig wachsend *alle* positiven relativen Primzahlen zu  $P$ , auch die *geraden* durchläuft. Da jedesmal, wenn  $m$  ein vollständiges Restsystem (mod.  $P$ ) durchläuft, zufolge §. 52, (3)

$$\Sigma \left( \frac{m}{P} \right) = 0$$

ist, so convergirt die Reihe  $M$ ; ist ferner  $k$  eine beliebige positive ganze Zahl, und betrachtet man alle diejenigen Zahlen  $m$ , welche  $< 2kP$  sind, so sind dieselben zum Theil ungerade, zum Theil gerade; die erstern stimmen offenbar mit allen Zahlen  $n < 2kP$  überein, und die letztern sind von der Form  $2m'$ , wo  $m'$  alle diejenigen Zahlen  $m$  durchläuft, welche  $< kP$  sind. In dieser Ausdehnung ist daher

$$\begin{aligned} \Sigma \left( \frac{m}{P} \right) \frac{1}{m} &= \Sigma \left( \frac{n}{P} \right) \frac{1}{n} + \Sigma \left( \frac{2m'}{P} \right) \frac{1}{2m'} \\ &= \Sigma \left( \frac{n}{P} \right) \frac{1}{n} + \left( \frac{2}{P} \right) \frac{1}{2} \Sigma \left( \frac{m'}{P} \right) \frac{1}{m'}, \end{aligned}$$

und hieraus folgt, wenn man  $k$  über alle Grenzen wachsen lässt,

$$M = N + \left( \frac{2}{P} \right) \frac{1}{2} \cdot M, \quad N = \left( 1 - \left( \frac{2}{P} \right) \frac{1}{2} \right) M.$$

Allgemeiner findet man leicht, dass

$$\Sigma \left( \frac{n}{P} \right) \frac{1}{n^s} = \left( 1 - \left( \frac{2}{P} \right) \frac{1}{2^s} \right) \Sigma \left( \frac{m}{P} \right) \frac{1}{m^s}$$

ist; man braucht nur den reciproken Werth des ersten Factors auf der rechten Seite in eine geometrische Reihe zu verwandeln, und diese mit der Reihe auf der linken Seite zu multipliciren, so er giebt sich als Product der zweite Factor auf der rechten Seite; oder man kann auch genau so wie oben verfahren, indem man die Zahlen  $m$  zerlegt in die Zahlen  $n$  und  $2m'$ .