$$\alpha_m = \left(\frac{D}{m}\right) \text{ oder } = 0,$$

je nachdem m relative Primzahl zu $2D$ (also eine Zahl n) ist oder nicht, und lässt m ein vollständiges Restsystem (mod. $4D$) durchlaufen, so ist die Summe der entsprechenden Coefficienten α_m stets $= 0$, weil diese Coefficienten α_m theils selbst $= 0$ sind und die übrigen, wie eine frühere Untersuchung (§. 52) ergeben hat, zur Hälfte den Werth $+1$, zur andern Hälfte den Werth -1 besitzen. Hieraus folgt unmittelbar, dass die Summe von noch so vielen auf einander folgenden Coefficienten α_m stets unterhalb einer endlichen Grösse ($\pm 2D$) bleibt. Mithin ist die in der oben angegebenen Art geordnete Reihe

$$\Sigma \frac{\alpha_m}{m^s} = \Sigma \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^s}$$

convergent, so lange s positiv bleibt, und zugleich eine stetige Function von s; und folglich wird, wenn ϱ unendlich klein wird,

$$\lim \Sigma \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^{1+\varrho}} = \Sigma \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n},$$

wo, wie wir nochmals hervorheben, die Glieder der Reihe *so geordnet* sind, dass *n beständig wächst.*

§. 102.

Es ist nun zweckmässig, bei der Bestimmung der Summe der unendlichen Reihe

$$N = \Sigma \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n}$$

dieselben vier Fälle zu unterscheiden, welche wir früher (§. 52) aufgestellt haben. Wir wenden uns zunächst zu dem Fall, in welchem

$$D = \pm P \equiv 1 \text{ (mod. 4), also } \left(\frac{D}{n}\right) = \left(\frac{n}{P}\right)$$

ist, wo P den absoluten Werth von D bedeutet, und also eine positive ungerade, durch kein Quadrat theilbare Zahl und > 1 ist. Dann lässt sich die Reihe

$$N = \Sigma \left(\frac{n}{P}\right) \frac{1}{n}$$

leicht auf die Reihe

$$M = \Sigma \left(\frac{m}{P}\right)\frac{1}{m}$$

zurückführen, in welcher m beständig wachsend *alle* positiven relativen Primzahlen zu P, auch die *geraden* durchläuft. Da jedesmal, wenn m ein vollständiges Restsystem (mod. P) durchläuft, zufolge §. 52, (3)

$$\Sigma \left(\frac{m}{P}\right) = 0$$

ist, so convergirt die Reihe M; ist ferner k eine beliebige positive ganze Zahl, und betrachtet man alle diejenigen Zahlen m, welche $< 2kP$ sind, so sind dieselben zum Theil ungerade, zum Theil gerade; die erstern stimmen offenbar mit allen Zahlen $n < 2kP$ überein, und die letztern sind von der Form $2m'$, wo m' alle diejenigen Zahlen m durchläuft, welche $< kP$ sind. In dieser Ausdehnung ist daher

$$\begin{aligned}\Sigma \left(\frac{m}{P}\right)\frac{1}{m} &= \Sigma \left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n} + \Sigma \left(\frac{2m'}{P}\right)\frac{1}{2m'} \\ &= \Sigma \left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n} + \left(\frac{2}{P}\right)\frac{1}{2}\,\Sigma \left(\frac{m'}{P}\right)\frac{1}{m'},\end{aligned}$$

und hieraus folgt, wenn man k über alle Grenzen wachsen lässt,

$$M = N + \left(\frac{2}{P}\right)\frac{1}{2}\cdot M,\quad N = \left(1 - \left(\frac{2}{P}\right)\frac{1}{2}\right)M.$$

Allgemeiner findet man leicht, dass

$$\Sigma \left(\frac{n}{P}\right)\frac{1}{n^s} = \left(1 - \left(\frac{2}{P}\right)\frac{1}{2^s}\right)\Sigma \left(\frac{m}{P}\right)\frac{1}{m^s}$$

ist; man braucht nur den reciproken Werth des ersten Factors auf der rechten Seite in eine geometrische Reihe zu verwandeln, und diese mit der Reihe auf der linken Seite zu multipliciren, so ergiebt sich als Product der zweite Factor auf der rechten Seite; oder man kann auch genau so wie oben verfahren, indem man die Zahlen m zerlegt in die Zahlen n und $2m'$.