Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie
Autor: Dirichlet, Peter
Verlag: Vieweg
Ort: Braunschweig
Jahr: 1871
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN30976923X
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X

LOG Id: LOG_0112
LOG Titel: §. 103. Summation der unendlichen Reihe für diesen Fall
LOG Typ: chapter

§. 103.

Die nun noch auszuführende Summation kann mit Hülfe des in den Supplementen (I. §. 116) bewiesenen Satzes auf verschiedene Arten bewerkstelligt werden, entweder durch Zurückführung auf Fourier'sche Reihen, oder durch die Integration eines rationalen Bruchs. Wir schlagen den letztern Weg als den directern ein. Bedeutet m irgend eine positive ganze Zahl, so ist bekanntlich

$$\frac{1}{m} = \int_0^1 x^{m-1} dx,$$

und folglich ist auch

$$M = \Sigma \left(\frac{m}{P}\right) \frac{1}{m} = \Sigma \left(\frac{m}{P}\right) \int_0^1 x^{m-1} dx.$$

Da nun das Jacobi'sche Symbol für alle einander nach dem Modul P congruenten Zahlen m denselben Werth hat, so ist die Summe der Glieder unserer Reihe, in welchen $m < kP$, gleich

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} f(x) \frac{1 - x^{kP}}{1 - x^P},$$

wo zur Abkürzung

$$f(x) = \Sigma \left(\frac{\mu}{P}\right) x^\mu$$

gesetzt ist, und der Summationsbuchstabe μ die Werthe m durchlaufen muss, welche $< P$ sind. Da dieselben ein vollständiges Restsystem in Bezug auf den Modul P bilden, so ist nach einem schon öfter benutzten Satze (§. 52)

$$f(1) = \Sigma \left(\frac{\mu}{P}\right) = 0;$$

es ist folglich $f(x)$ theilbar durch $x(x-1)$, und mithin hat der Bruch

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{f(x)}{1 - x^P}$$

im reellen Integrationsintervall $0 \leqq x \leqq 1$ endliche Werthe. Hieraus folgt leicht, dass mit unbegrenzt wachsendem k das Integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} \frac{f(x)\,x^{kP}}{1-x^P}$$

unendlich klein wird, und wir erhalten folglich

$$\Sigma \left(\frac{m}{P}\right) \frac{1}{m} = \int_0^1 \frac{dx}{x} \frac{f(x)}{1-x^P};$$

die Aufgabe ist mithin darauf zurückgeführt, einen echten rationalen Bruch zu integriren, was bekanntlich durch Zerlegung desselben in sogenannte Partialbrüche geschieht. Setzen wir zur Abkürzung

$$\sqrt{-1} = i,\quad e^{\frac{2\pi i}{P}} = \theta,$$

so ist in unserm Fall der Nenner

$$x^P - 1 = \Pi (x - \theta^\alpha),$$

wo das Productzeichen sich auf den Buchstaben α bezieht, welcher ein vollständiges Restsystem in Bezug auf den Modul P durchlaufen muss; wir setzen fest, dass α die Werthe

$$0, 1, 2 \ldots (P-1)$$

durchlaufen soll; man erhält dann nach bekannten Regeln

$$\frac{1}{x} \frac{f(x)}{1-x^P} = -\frac{1}{P} \Sigma \frac{f(\theta^\alpha)}{x - \theta^\alpha},$$

wo das Summenzeichen sich auf den Buchstaben α bezieht. Nach der oben eingeführten Bezeichnung ist nun

$$f(\theta^\alpha) = \Sigma \left(\frac{\mu}{P}\right) e^{\mu \frac{2\alpha\pi i}{P}},$$

und diese Summe ist vermöge des in den Supplementen (I. §. 116) bewiesenen Satzes

$$= \left(\frac{\alpha}{P}\right) \sqrt{P} \,.\, i^{1/4 (P-1)^2}$$

wo die Quadratwurzel $\sqrt{P}$ *positiv*, und

$$\left(\frac{\alpha}{P}\right) = 0$$

zu nehmen ist, wenn α keine relative Primzahl zu P ist. Die Zerlegung in Partialbrüche liefert uns also das Resultat

$$\frac{1}{x} \frac{f(x)}{1-x^P} = -\frac{i^{1/4 (P-1)^2}}{\sqrt{P}} \Sigma \frac{\left(\frac{\alpha}{P}\right)}{x - \theta^\alpha},$$

wo das Summenzeichen sich auf den Buchstaben α bezieht, der nur alle die positiven ganzen Zahlen zu durchlaufen braucht, welche $< P$ und relative Primzahlen zu P sind.

Die nun auszuführenden Integrationen der einzelnen $\varphi(P)$ Partialbrüche sind in der einen Formel

$$\int \frac{dx}{x-a-bi} = \tfrac{1}{2}\log\left\{(x-a)^2+b^2\right\} + i\,\mathrm{arctang}\,\frac{x-a}{b}$$

oder

$$\int \frac{dx}{x-e^{\delta i}} = \tfrac{1}{2}\log\left\{x^2-2x\cos\delta+1\right\} + i\,\mathrm{arctang}\,\frac{x-\cos\delta}{\sin\delta}$$

enthalten, aus welcher, wenn $0 < \delta < 2\pi$ ist,

$$\int_0^1 \frac{dx}{x-e^{\delta i}} =$$

$$\log(2\sin\tfrac{1}{2}\delta) + i\left\{\mathrm{arctang}(\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\delta) + \mathrm{arctang}(\mathrm{cotang}\,\delta)\right\}$$

folgt, vorausgesetzt, dass die beiden Arcus, welche in der Parenthese stehen, in dem Intervall zwischen $+\frac{1}{2}\pi$ und $-\frac{1}{2}\pi$ genommen werden. Mag nun δ zwischen 0 und π, oder zwischen π und 2π liegen, so ergiebt sich hieraus leicht, dass immer

$$\int_0^1 \frac{dx}{x-e^{\delta i}} = \log(2\sin\tfrac{1}{2}\delta) + i(\tfrac{1}{2}\pi-\tfrac{1}{2}\delta)$$

ist.

Wenden wir dies auf unsern Fall an, so erhalten wir

$$\int_0^1 \frac{dx}{x-\theta^\alpha} = \log\left(2\sin\frac{\alpha\pi}{P}\right) + i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha\pi}{P}\right)$$

und folglich

$$\Sigma\left(\frac{m}{P}\right)\frac{1}{m} = -\frac{i^{1/4(P-1)^2}}{\sqrt{P}}\,\Sigma\left(\frac{\alpha}{P}\right)\left\{\log\left(2\sin\frac{\alpha\pi}{P}\right) + i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha\pi}{P}\right)\right\},$$

wo das Summenzeichen rechts sich auf alle $\varphi(P)$ Werthe von α erstreckt. Da nun

$$\Sigma\left(\frac{\alpha}{P}\right) = 0$$

ist, so können die in der Parenthese befindlichen Glieder, welche von α unabhängig sind, wie $\log 2$ und $\frac{1}{2}\pi i$ weggelassen werden, und man erhält dann

$$\Sigma\left(\frac{m}{P}\right)\frac{1}{m} = -\frac{i^{1/4(P-1)^2}}{\sqrt{P}}\,\Sigma\left(\frac{\alpha}{P}\right)\left\{\log\sin\frac{\alpha\pi}{P} - \frac{\alpha\pi i}{P}\right\}.$$

Dieses Resultat nimmt noch einfachere Formen an, wenn man die beiden Fälle $P \equiv 1 \pmod{4}$ und $P \equiv 3 \pmod{4}$ von einander trennt. Im erstern Falle ist nämlich

$$i^{1/4(P-1)^2} = 1$$

und folglich, da die linke Seite reell ist,

$$\Sigma\left(\frac{m}{P}\right)\frac{1}{m} = -\frac{1}{\sqrt{P}}\,\Sigma\left(\frac{\alpha}{P}\right)\log\sin\frac{\alpha\pi}{P}$$

$$\Sigma\left(\frac{\alpha}{P}\right)\alpha = 0;$$

im letztern Fall dagegen ist

$$i^{1/4(P-1)^2} = i$$

und folglich

$$\Sigma\left(\frac{m}{P}\right)\frac{1}{m} = -\frac{\pi}{P\sqrt{P}}\,\Sigma\left(\frac{\alpha}{P}\right)\alpha$$

$$\Sigma\left(\frac{\alpha}{P}\right)\log\sin\frac{\alpha\pi}{P} = 0.$$

Diese beiden Vereinfachungen lassen sich auch auf folgende Weise verificiren. Bedenkt man, dass $(P-\alpha)$ dieselben Werthe wie α durchläuft, so folgt

$$\Sigma\left(\frac{\alpha}{P}\right)\alpha = \Sigma\left(\frac{P-\alpha}{P}\right)(P-\alpha) = -\Sigma\left(\frac{-\alpha}{P}\right)\alpha$$

$$\Sigma\left(\frac{\alpha}{P}\right)\log\sin\frac{\alpha\pi}{P} = \Sigma\left(\frac{P-\alpha}{P}\right)\log\sin\frac{(P-\alpha)\pi}{P}$$

$$= \Sigma\left(\frac{-\alpha}{P}\right)\log\sin\frac{\alpha\pi}{P};$$

ist nun $P \equiv 1 \pmod{4}$, so folgt hieraus

$$\Sigma\left(\frac{\alpha}{P}\right)\alpha = -\Sigma\left(\frac{\alpha}{P}\right)\alpha = 0;$$

ist dagegen $P \equiv 3 \pmod{4}$, so ergiebt sich

$$\Sigma\left(\frac{\alpha}{P}\right)\log\sin\frac{\alpha\pi}{P} = -\Sigma\left(\frac{\alpha}{P}\right)\log\sin\frac{\alpha\pi}{P} = 0.$$