§. 104.

Hiermit ist nun für den von uns betrachteten Fall, in welchem die Determinante $D = \pm P \equiv 1 \pmod{4}$ und durch kein Quadrat theilbar ist, der gesuchte Grenzwerth

$$\Sigma\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n} = \left(1 - \left(\frac{2}{P}\right)\frac{1}{2}\right)\Sigma\left(\frac{m}{P}\right)\frac{1}{m}$$

wirklich in Form eines geschlossenen Ausdrucks gefunden, und um die Anzahl h der zu dieser Determinante D gehörenden ursprünglichen Formen der ersten Art zu erhalten, brauchen wir nur noch die beiden Fälle, in welchen D negativ oder positiv ist, von einander zu trennen.

Erstens. Ist D negativ $= -P$, und also $P \equiv 3 \pmod{4}$, so ist (§. 97)

$$h = \frac{2\sqrt{-D}}{\pi}\Sigma\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n}$$

und da in diesem Fall

$$\Sigma\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n} = \left(1 - \left(\frac{2}{P}\right)\frac{1}{2}\right)\Sigma\left(\frac{m}{P}\right)\frac{1}{m}$$

$$= -\left(1 - \left(\frac{2}{P}\right)\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{P\sqrt{P}}\Sigma\left(\frac{\alpha}{P}\right)\alpha$$

ist, so ergiebt sich

$$h = -\frac{1}{P}\left(2 - \left(\frac{2}{P}\right)\right)\Sigma\left(\frac{\alpha}{P}\right)\alpha,$$

wo α wieder alle positiven ganzen Zahlen durchlaufen muss, die $< P$ und relative Primzahlen zu P sind. Offenbar muss dieser Ausdruck für die Classenanzahl sich noch in der Weise umformen lassen, dass der Divisor P verschwindet. Dies lässt sich in der That durch folgende Betrachtung erreichen. Bezeichnet man mit α' diejenigen Zahlen α, welche $< \frac{1}{2}P$ sind, so stimmen die Zahlen $(P - \alpha')$ mit denjenigen Zahlen α überein, welche $> \frac{1}{2}P$ sind; es ist daher

$$\Sigma\left(\frac{\alpha}{P}\right)\alpha = \Sigma\left(\frac{\alpha'}{P}\right)\alpha' + \Sigma\left(\frac{P-\alpha'}{P}\right)(P - \alpha'),$$

wo die Summenzeichen rechts sich auf den Buchstaben α' beziehen; da nun $P \equiv 3 \pmod{4}$, und also

$$\left(\frac{P-\alpha'}{P}\right) = \left(\frac{-1}{P}\right)\left(\frac{\alpha'}{P}\right) = -\left(\frac{\alpha'}{P}\right)$$

ist, so erhalten wir

$$\Sigma\left(\frac{\alpha}{P}\right)\alpha = 2\,\Sigma\left(\frac{\alpha'}{P}\right)\alpha' - P\,\Sigma\left(\frac{\alpha'}{P}\right).$$

Offenbar wird die Reihe aller Zahlen α aber auch erschöpft durch die sämmtlichen Zahlen $2\alpha'$ und $(P-2\alpha')$, und folglich ist auch

$$\Sigma\left(\frac{\alpha}{P}\right)\alpha = \Sigma\left(\frac{2\alpha'}{P}\right)2\alpha' + \Sigma\left(\frac{P-2\alpha'}{P}\right)(P-2\alpha')$$

oder nach leichten Reductionen

$$\left(\frac{2}{P}\right)\Sigma\left(\frac{\alpha}{P}\right)\alpha = 4\,\Sigma\left(\frac{\alpha'}{P}\right)\alpha' - P\,\Sigma\left(\frac{\alpha'}{P}\right).$$

Zieht man diese Gleichung von der frühern ab, nachdem dieselbe mit 2 multiplicirt ist, so erhält man

$$\left\{2-\left(\frac{2}{P}\right)\right\}\Sigma\left(\frac{\alpha}{P}\right)\alpha = -P\,\Sigma\left(\frac{\alpha'}{P}\right)$$

und hierdurch verwandelt sich der obige Ausdruck für die Classenanzahl in den folgenden einfachsten:

$$h = \Sigma\left(\frac{\alpha'}{P}\right).$$

Wir können daher für diesen Fall als Resultat unserer ganzen Untersuchung folgenden Satz aussprechen:

Ist P eine positive, durch kein Quadrat theilbare Zahl von der Form $4n+3$, und bezeichnet man mit α' alle relativen Primzahlen zu P, welche $< \frac{1}{2}P$ sind, so findet man die Classenanzahl h der zu der Determinante $D = -P$ gehörenden Formen der ersten Art, wenn man von der Anzahl derjenigen der Zahlen α', für welche

$$\left(\frac{\alpha'}{P}\right) = +1$$

ist, die Anzahl der übrigen Zahlen α' abzieht.

Der Ausdruck dieses Satzes vereinfacht sich in dem speciellen Fall, wenn P eine einfache Primzahl ist, folgendermaassen:

Ist der absolute Werth p der negativen Determinante $D = -p$ eine Primzahl von der Form $4n+3$, so ist die Classenanzahl h der zu ihr gehörigen Formen der ersten Art gleich dem Ueberschuss der Anzahl der zwischen 0 und $\frac{1}{2}p$ liegenden quadratischen Reste *von p über die Anzahl der zwischen denselben Grenzen liegenden quadratischen Nichtreste von p.*

Dieser letztere Satz ist in einer nicht wesentlich verschiedenen Form schon einige Zeit vor der Veröffentlichung der Lösung des allgemeinen Problems*) durch Induction von *Jacobi***) gefunden.

Als Beispiel wählen wir die Determinante $D = -11$; unter den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 sind vier quadratische Reste 1, 3, 4, 5, und ein quadratischer Nichtrest 2 von 11; mithin ist die Anzahl der Formen erster Art $= 4 - 1 = 3$. In der That giebt es für diese Determinante nur drei (nicht äquivalente) reducirte Formen erster Art, nämlich $(1, 0, 11)$, $(3, 1, 4)$ und $(3, -1, 4)$.

Beiläufig mag hier bemerkt werden, dass zufolge des gewonnenen Resultats die Anzahl der Zahlen α', für welche

$$\left(\frac{\alpha'}{P}\right) = +1,$$

stets grösser ist, als die Anzahl der Zahlen α', für welche

$$\left(\frac{\alpha'}{P}\right) = -1$$

ist, da h immer eine positive Zahl, nie $= 0$ ist: ein Satz, welcher auch für den einfachsten Fall, wo P eine Primzahl von der Form $4n + 3$ ist, auf anderm Wege noch nicht hat bewiesen werden können (vergl. das Theorem über die arithmetische Progression, Supplement VI.).

Zweitens. Ist die Determinante D positiv $= +P$, und also $P \equiv 1 \pmod{4}$, so ist (nach §. 99) die Classenanzahl

$$h = \frac{2\sqrt{D}}{\log(T + U\sqrt{D})} \sum \left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n}$$

und da in diesem Fall

$$\sum \left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n} = \left(1 - \left(\frac{2}{P}\right)\frac{1}{2}\right) \sum \left(\frac{m}{P}\right)\frac{1}{m}$$

---

*) *Dirichlet: Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres* in Crelle's Journal XIX und XXI.

**) *Observatio arithmetica* in Crelle's Journal IX; vergl. *Dirichlet: Gedächtnissrede auf C. G. J. Jacobi,* und *Kummer: Gedächtnissrede auf G. P. Lejeune Dirichlet.*