

## Werk

**Titel:** Vorlesungen über Zahlentheorie

**Autor:** Dirichlet, Peter

**Verlag:** Vieweg

**Ort:** Braunschweig

**Jahr:** 1871

**Kollektion:** Mathematica

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN30976923X

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X>

**LOG Id:** LOG\_0113

**LOG Titel:** S. 104. Endresultat für diesen Fall

**LOG Typ:** chapter

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

§. 104.

Hiermit ist nun für den von uns betrachteten Fall, in welchem die Determinante  $D = \pm P \equiv 1 \pmod{4}$  und durch kein Quadrat theilbar ist, der gesuchte Grenzwert

$$\Sigma \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n} = \left(1 - \left(\frac{2}{P}\right) \frac{1}{2}\right) \Sigma \left(\frac{m}{P}\right) \frac{1}{m}$$

wirklich in Form eines geschlossenen Ausdrucks gefunden, und um die Anzahl  $h$  der zu dieser Determinante  $D$  gehörenden ursprünglichen Formen der ersten Art zu erhalten, brauchen wir nur noch die beiden Fälle, in welchen  $D$  negativ oder positiv ist, von einander zu trennen.

*Erstens.* Ist  $D$  negativ  $= -P$ , und also  $P \equiv 3 \pmod{4}$ , so ist (§. 97)

$$h = \frac{2\sqrt{-D}}{\pi} \Sigma \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n}$$

und da in diesem Fall

$$\begin{aligned} \Sigma \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n} &= \left(1 - \left(\frac{2}{P}\right) \frac{1}{2}\right) \Sigma \left(\frac{m}{P}\right) \frac{1}{m} \\ &= - \left(1 - \left(\frac{2}{P}\right) \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{P\sqrt{P}} \Sigma \left(\frac{\alpha}{P}\right) \alpha \end{aligned}$$

ist, so ergibt sich

$$h = - \frac{1}{P} \left(2 - \left(\frac{2}{P}\right)\right) \Sigma \left(\frac{\alpha}{P}\right) \alpha,$$

wo  $\alpha$  wieder alle positiven ganzen Zahlen durchlaufen muss, die  $< P$  und relative Primzahlen zu  $P$  sind. Offenbar muss dieser Ausdruck für die Classenanzahl sich noch in der Weise umformen lassen, dass der Divisor  $P$  verschwindet. Dies lässt sich in der That durch folgende Betrachtung erreichen. Bezeichnet man mit  $\alpha'$  diejenigen Zahlen  $\alpha$ , welche  $< \frac{1}{2}P$  sind, so stimmen die Zahlen  $(P - \alpha')$  mit denjenigen Zahlen  $\alpha$  überein, welche  $> \frac{1}{2}P$  sind; es ist daher

$$\Sigma \left(\frac{\alpha}{P}\right) \alpha = \Sigma \left(\frac{\alpha'}{P}\right) \alpha' + \Sigma \left(\frac{P - \alpha'}{P}\right) (P - \alpha'),$$

wo die Summenzeichen rechts sich auf den Buchstaben  $\alpha'$  beziehen; da nun  $P \equiv 3 \pmod{4}$ , und also

$$\left(\frac{P-\alpha'}{P}\right) = \left(\frac{-1}{P}\right) \left(\frac{\alpha'}{P}\right) = -\left(\frac{\alpha'}{P}\right)$$

ist, so erhalten wir

$$\Sigma \left(\frac{\alpha}{P}\right) \alpha = 2 \Sigma \left(\frac{\alpha'}{P}\right) \alpha' - P \Sigma \left(\frac{\alpha'}{P}\right).$$

Offenbar wird die Reihe aller Zahlen  $\alpha$  aber auch erschöpft durch die sämmtlichen Zahlen  $2\alpha'$  und  $(P-2\alpha')$ , und folglich ist auch

$$\Sigma \left(\frac{\alpha}{P}\right) \alpha = \Sigma \left(\frac{2\alpha'}{P}\right) 2\alpha' + \Sigma \left(\frac{P-2\alpha'}{P}\right) (P-2\alpha')$$

oder nach leichten Reductionen

$$\left(\frac{2}{P}\right) \Sigma \left(\frac{\alpha}{P}\right) \alpha = 4 \Sigma \left(\frac{\alpha'}{P}\right) \alpha' - P \Sigma \left(\frac{\alpha'}{P}\right).$$

Zieht man diese Gleichung von der frühern ab, nachdem dieselbe mit 2 multiplicirt ist, so erhält man

$$\left\{2 - \left(\frac{2}{P}\right)\right\} \Sigma \left(\frac{\alpha}{P}\right) \alpha = -P \Sigma \left(\frac{\alpha'}{P}\right)$$

und hierdurch verwandelt sich der obige Ausdruck für die Classenanzahl in den folgenden einfachsten:

$$h = \Sigma \left(\frac{\alpha'}{P}\right).$$

Wir können daher für diesen Fall als Resultat unserer ganzen Untersuchung folgenden Satz aussprechen:

*Ist  $P$  eine positive, durch kein Quadrat theilbare Zahl von der Form  $4n+3$ , und bezeichnet man mit  $\alpha'$  alle relativen Primzahlen zu  $P$ , welche  $< \frac{1}{2}P$  sind, so findet man die Classenanzahl  $h$  der zu der Determinante  $D = -P$  gehörenden Formen der ersten Art, wenn man von der Anzahl derjenigen der Zahlen  $\alpha'$ , für welche*

$$\left(\frac{\alpha'}{P}\right) = +1$$

*ist, die Anzahl der übrigen Zahlen  $\alpha'$  abzieht.*

Der Ausdruck dieses Satzes vereinfacht sich in dem speciellen Fall, wenn  $P$  eine einfache Primzahl ist, folgendermaassen:

*Ist der absolute Werth  $p$  der negativen Determinante  $D = -p$  eine Primzahl von der Form  $4n+3$ , so ist die Classenanzahl  $h$  der zu ihr gehörigen Formen der ersten Art gleich dem Ueberschuss der Anzahl der zwischen 0 und  $\frac{1}{2}p$  liegenden quadratischen Reste*

von  $p$  über die Anzahl der zwischen denselben Grenzen liegenden quadratischen Nichtreste von  $p$ .

Dieser letztere Satz ist in einer nicht wesentlich verschiedenen Form schon einige Zeit vor der Veröffentlichung der Lösung des allgemeinen Problems\*) durch Induction von *Jacobi*\*\*\*) gefunden.

Als Beispiel wählen wir die Determinante  $D = -11$ ; unter den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 sind vier quadratische Reste 1, 3, 4, 5, und ein quadratischer Nichtrest 2 von 11; mithin ist die Anzahl der Formen erster Art  $= 4 - 1 = 3$ . In der That giebt es für diese Determinante nur drei (nicht äquivalente) reducirte Formen erster Art, nämlich (1, 0, 11), (3, 1, 4) und (3, -1, 4).

Beiläufig mag hier bemerkt werden, dass zufolge des gewonnenen Resultats die Anzahl der Zahlen  $\alpha'$ , für welche

$$\left(\frac{\alpha'}{P}\right) = +1,$$

stets grösser ist, als die Anzahl der Zahlen  $\alpha'$ , für welche

$$\left(\frac{\alpha'}{P}\right) = -1$$

ist, da  $h$  immer eine positive Zahl, nie  $= 0$  ist: ein Satz, welcher auch für den einfachsten Fall, wo  $P$  eine Primzahl von der Form  $4n + 3$  ist, auf anderm Wege noch nicht hat bewiesen werden können (vergl. das Theorem über die arithmetische Progression, Supplement VI.).

*Zweitens.* Ist die Determinante  $D$  positiv  $= +P$ , und also  $P \equiv 1 \pmod{4}$ , so ist (nach §. 99) die Classenanzahl

$$h = \frac{2\sqrt{D}}{\log(T + U\sqrt{D})} \sum \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n}$$

und da in diesem Fall

$$\sum \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n} = \left(1 - \left(\frac{2}{P}\right) \frac{1}{2}\right) \sum \left(\frac{m}{P}\right) \frac{1}{m}$$

\*) *Dirichlet: Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres* in *Crelle's Journal* XIX und XXI.

\*\*) *Observatio arithmetica* in *Crelle's Journal* IX; vergl. *Dirichlet: Gedächtnissrede auf C. G. J. Jacobi*, und *Kummer: Gedächtnissrede auf G. P. Lejeune Dirichlet*.