Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie
Autor: Dirichlet, Peter
Verlag: Vieweg
Ort: Braunschweig
Jahr: 1871
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN30976923X
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X

LOG Id: LOG_0114
LOG Titel: §. 105.   Summation der unendlichen Reihe in den übrigen Fällen
LOG Typ: chapter

$$= -\frac{1-\left(\frac{2}{P}\right)\frac{1}{2}}{\sqrt{P}} \Sigma \left(\frac{\alpha}{P}\right) \log \sin \frac{\alpha\pi}{P}$$

ist, so ergiebt sich

$$h = -\frac{2-\left(\frac{2}{P}\right)}{\log(T+U\sqrt{P})} \Sigma \left(\frac{\alpha}{P}\right) \log \sin \frac{\alpha\pi}{P}.$$

Bezeichnet man die Zahlen α mit a oder mit b, je nachdem

$$\left(\frac{\alpha}{P}\right) = +1 \text{ oder } = -1$$

ist, so nimmt die vorstehende Gleichung folgende Gestalt an:

$$h = \frac{2-\left(\frac{2}{P}\right)}{\log(T+U\sqrt{P})} \log \frac{\Pi \sin \frac{b\pi}{P}}{\Pi \sin \frac{a\pi}{P}};$$

hierin beziehen sich die Productzeichen Π im Zähler und Nenner resp. auf alle b und auf alle a; und ausserdem bedeuten T, U die kleinsten positiven ganzen Zahlen, welche der Pell'schen Gleichung

$$T^2 - PU^2 = 1$$

genügen. Der wahre Charakter dieses Resultates wird durch eine weitere Umformung (§. 107) noch deutlicher werden.

§. 105.

Nachdem im Vorhergehenden (§§. 102 bis 104) der Fall, in welchem $D \equiv 1 \pmod{4}$ ist, seine vollständige Erledigung gefunden hat, begnügen wir uns, die Hauptmomente für die allgemeine Untersuchung hervorzuheben. Es handelt sich zunächst um die Bestimmung der Reihe

$$N = \Sigma \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n},$$

in welcher n beständig wachsend alle positiven ganzen Zahlen durchlaufen muss, die relative Primzahlen zu $2D$ sind.

Gebrauchen wir nun die Buchstaben P, δ, ε genau in derselben Bedeutung, wie sie am Schluss des §. 52 festgesetzt ist, so ist

$$\left(\frac{D}{n}\right) = \delta^{1/2(n-1)}\,\varepsilon^{1/8(n^2-1)}\left(\frac{n}{P}\right),$$

und folglich stets

$$\left(\frac{D}{n}\right) = \left(\frac{D}{\nu}\right),$$

wenn $n \equiv \nu \pmod{8P}$ ist. Setzt man daher

$$\frac{1}{n} = \int_0^1 x^{n-1}\,dx,$$

und

$$f(x) = \Sigma \left(\frac{D}{\nu}\right) x^{\nu},$$

wo ν alle die Zahlen n durchläuft, welche $< 8P$ sind, und berücksichtigt, dass $f(1) = 0$ ist (§. 52), so findet man unter der Voraussetzung, dass der Modulus von x auf dem Integrationswege < 1 bleibt, ähnlich wie in §. 103,

$$N = \int_0^1 \frac{f(x)}{1-x^{8P}}\,\frac{dx}{x} = -\frac{1}{8P}\int_0^1 \Sigma\,\frac{f(\omega)\,dx}{x-\omega},$$

wo ω alle Wurzeln der Gleichung

$$\omega^{8P} = 1$$

durchlaufen muss; diese sind bekanntlich von der Form

$$\omega = j^r\,\theta^s,$$

wo zur Abkürzung

$$j = e^{\frac{\pi i}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}},\quad \theta = e^{\frac{2\pi i}{P}}$$

gesetzt ist; lässt man r und s vollständige Restsysteme resp. nach den Moduln 8 und P durchlaufen, so erhält ω seine sämmtlichen $8P$ Werthe.

Bedeuten nun μ und m resp. die kleinsten positiven Reste der Zahl ν in Bezug auf die Moduln 8 und P, so ist μ eine der vier Zahlen 1, 3, 5, 7, und m eine der $\varphi(P)$ relativen Primzahlen zu P; und da umgekehrt jedem solchen Restpaare μ, m eine und nur eine bestimmte Zahl ν entspricht (§. 25), so findet man, mit Zuziehung des in den Supplementen (§. 116) bewiesenen Hülfssatzes,

$$f(\omega) = \Sigma \left(\frac{D}{\nu}\right) \omega^{\nu} = \Sigma\ \delta^{\frac{1}{2}(\nu-1)}\, \varepsilon^{\frac{1}{8}(\nu^2-1)} \left(\frac{\nu}{P}\right) j^{\nu r}\, \theta^{\nu s}$$

$$= \Sigma\ \delta^{\frac{1}{2}(\mu-1)}\, \varepsilon^{\frac{1}{8}(\mu^2-1)}\, j^{\mu r}\ \Sigma \left(\frac{m}{P}\right) \theta^{m s}$$

$$= j^r (1 + \delta i^{3r})\, (1 + \varepsilon(-1)^r) \left(\frac{s}{P}\right) i^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2} \sqrt{P},$$

wo $\sqrt{P}$ *positiv* ist, und das Jacobi'sche Symbol den Werth Null hat, wenn s keine relative Primzahl zu P ist. Wenn $P = 1$, so sind die Factoren, in welchen P vorkommt wegzulassen. Setzen wir nun zur Abkürzung

$$\psi(r) = \int_0^1 \Sigma \left(\frac{s}{P}\right) \frac{dx}{x - j^r \theta^s},$$

wo s alle incongruenten Zahlen (mod. P) zu durchlaufen hat, die relative Primzahlen zu P sind, so ergiebt sich

$$N = -\frac{i^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2}}{8\sqrt{P}}\ \Sigma\, j^r (1 + \delta i^{3r})\, (1 + \varepsilon(-1)^r)\, \psi(r),$$

wo r ein vollständiges Restsystem (mod. 8) durchlaufen muss. Trennt man jetzt die vier Fälle von einander, so erhält man folgende Resultate:

I. $D = \pm P \equiv 1$ (mod. 4), $\delta = +1$, $\varepsilon = +1$;

$$N \,.\, 2\sqrt{P} = -i^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2} \{\psi(0) - \psi(4)\}.$$

II. $D = \pm P \equiv 3$ (mod. 4), $\delta = -1$, $\varepsilon = +1$;

$$N \,.\, 2\sqrt{P} = -i \,.\, i^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2} \{\psi(2) - \psi(6)\}.$$

III. $D = \pm 2P \equiv 2$ (mod. 8), $\delta = +1$, $\varepsilon = -1$;

$$N \,.\, 2\sqrt{2P} = -i^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2} \{\psi(1) - \psi(3) - \psi(5) + \psi(7)\}.$$

IV. $D = \pm 2P \equiv 6$ (mod. 8), $\delta = -1$, $\varepsilon = -1$;

$$N \,.\, 2\sqrt{2P} = -i \,.\, i^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2} \{\psi(1) + \psi(3) - \psi(5) - \psi(7)\}.$$

Dieselben Formeln gelten auch noch für den Fall $P = 1$, d. h. für die Fälle $D = -1$, $D = +2$, $D = -2$, wenn

$$\psi(r) = \int_0^1 \frac{dx}{x - j^r}$$

gesetzt wird. Zur Bestimmung der Werthe $\psi(r)$, auf welche es jetzt allein noch ankommt, dient wieder die unter der Voraussetzung $0 < \varphi < 2\pi$ gültige Gleichung

$$\int_0^1 \frac{dx}{x - e^{\varphi i}} = \log(2 \sin \tfrac{1}{2}\varphi) + \tfrac{1}{2}(\pi - \varphi)\, i,$$

und man findet hieraus für den Fall $P = 1$ leicht folgende Resultate:

$$\begin{aligned} D &= -1; \quad N = \frac{\pi}{4} \\ D &= +2; \quad N = \frac{\log(1 + \sqrt{2})}{\sqrt{2}} \\ D &= -2; \quad N = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, \end{aligned} \tag{1}$$

wo $\sqrt{2}$ positiv zu nehmen ist. Schliessen wir von jetzt an den Fall $P = 1$ gänzlich aus, so ist

$$\int_0^1 \frac{dx}{x - j^r \theta^s} = \log\left(2 \sin \frac{m\pi}{8P}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{m\pi}{8P}\right) i,$$

wo m den kleinsten positiven Rest der Zahl $(Pr + 8s)$ nach dem Modul $8P$ bedeutet, so dass

$$m \equiv Pr \pmod{8}, \; m \equiv 8s \pmod{P}, \; 0 < m < 8P$$

ist; hieraus folgt

$$\psi(r) = \left(\frac{2}{P}\right) \Sigma \left(\frac{m}{P}\right) \left\{\log\left(2 \sin \frac{m\pi}{8P}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{m\pi}{8P}\right) i\right\},$$

wo m diejenigen $\varphi(P)$ positiven Zahlen durchlaufen muss, welche relative Primzahlen zu P, kleiner als $8P$ und zugleich $\equiv Pr \pmod{8}$ sind; da dieselben nach dem Modul P incongruent sind, so ist (§. 52)

$$\Sigma \left(\frac{m}{P}\right) = 0,$$

und folglich nimmt die vorstehende Gleichung folgende einfachere Gestalt an

$$\begin{gathered} \psi(r) = \left(\frac{2}{P}\right) \Sigma \left(\frac{m}{P}\right) \left(\log \sin \frac{m\pi}{8P} - \frac{m\pi i}{8P}\right), \\ m \equiv Pr \pmod{8}, \quad 0 < m < 8P. \end{gathered} \tag{2}$$

Hierdurch ist nun der Werth der unendlichen Reihe N in allen Fällen auf eine Summe von einer endlichen Anzahl von Gliedern zurückgeführt; dieselbe ist aber noch bedeutender Vereinfachungen fähig, zufolge gewisser Eigenschaften der acht Ausdrücke $\psi(r)$, die entweder aus der so eben gefundenen Form, oder auch aus ihrer ursprünglichen Definition leicht abgeleitet werden können. Indem wir den letztern Weg einschlagen, setzen wir zur Abkürzung

$$F(x) = \Pi(x - \theta^s)^{\left(\frac{s}{P}\right)} = \frac{\Pi(x-\theta^a)}{\Pi(x-\theta^b)} \tag{3}$$

wo die Buchstaben a und b die in §. 52 festgesetzte Bedeutung haben; dann wird zufolge der obigen Definition

$$\psi(r) = \int_0^1 d\log F(xj^{-r}),$$

wo der Modulus der Variabeln x auf dem Wege von 0 bis 1 stets < 1 bleibt, oder auch

$$\psi(r) = \int_0^{j^{-r}} d\log F(x),$$

wo, wenn die complexen Grössen in der bekannten Weise geometrisch durch Puncte einer Ebene dargestellt werden, der Punct x von 0 bis j^{-r} sich so bewegen muss, dass er im Innern des mit dem Halbmesser 1 um den Punct 0 beschriebenen Kreises bleibt. Die acht Puncte j^r zerlegen die Peripherie dieses Kreises in acht gleiche Octanten, auf welche sich die $\varphi(P)$ Puncte θ^s vertheilen, die ihrerseits wieder in zwei Classen θ^a und θ^b zerfallen.

Aus der Definition der Function $F(x)$ geht zunächst hervor, dass sie mit

$$\Pi(x' - \theta^{-s})^{\left(\frac{s}{P}\right)} = F(x')^{\left(\frac{-1}{P}\right)}$$

conjugirt ist, wenn x' den mit x conjugirten complexen Werth bedeutet; und hieraus folgt unmittelbar, dass $\psi(r)$ und

$$\left(\frac{-1}{P}\right)\int_0^{j^r} d\log F(x') = \left(\frac{-1}{P}\right)\psi(-r)$$

ebenfalls conjugirt sind. Setzt man daher zur Abkürzung

$$\begin{aligned} R(r) &= \psi(-r) + \left(\frac{-1}{P}\right)\psi(r), \\ J(r) &= \psi(-r) - \left(\frac{-1}{P}\right)\psi(r), \end{aligned} \tag{4}$$

so wird R reell, und J rein imaginär oder $= 0$; und man erkennt leicht, dass die Summe N sich auf Ausdrücke von der Form R oder J reducirt, je nachdem die Determinante D positiv oder negativ ist.

Aus der Definition der Function $F(x)$ folgt ferner leicht die Relation

$$F(x)\,F(-x) = F(x^2)^{\left(\frac{2}{P}\right)}; \tag{5}$$

da nun, wenn x im Innern des Kreises von 0 bis j^{-r} geht, gleichzeitig $-x$ von 0 bis $j^{-(r+4)}$, und x^2 von 0 bis j^{-2r} fortrückt, so ergiebt sich

$$\psi(r) + \psi(r+4) = \left(\frac{2}{P}\right)\psi(2r); \tag{6}$$

dieselbe Eigenschaft kommt offenbar auch den Ausdrücken R und J zu.

Die Function $F(x)$ besitzt endlich noch die folgende Eigenschaft

$$F\left(\frac{1}{x}\right) = \theta^{\Sigma\left(\frac{s}{P}\right)s} F(x)^{\left(\frac{-1}{P}\right)}; \tag{7}$$

da nun, wenn x im Innern des Kreises von 0 bis j^{-r} geht, der reciproke Werth y ausserhalb des Kreises von ∞ bis j^r fortrückt, so folgt

$$\int_{\infty}^{j^r} d\log F(y) = \left(\frac{-1}{P}\right)\psi(r),$$

und hieraus ergiebt sich

$$J(r) = \int_0^{\infty} d\log F(z_r),$$

wo z_r im Innern des Kreises von 0 bis j^r, dann ausserhalb desselben von j^r bis ∞ geht. Die Differenz $J(r) - J(r+1)$ ist daher ein geschlossenes Integral, in welchem die Integrationsvariabele einen positiven Umlauf um diejenigen Puncte θ^s macht, die auf dem von den Puncten j^r und j^{r+1} begrenzten Octanten liegen, und folglich ist nach bekannten Sätzen der complexen Integration

$$J(r) - J(r+1) = 2\pi i \sum_r^{r+1}\left(\frac{s}{P}\right),$$

wo s alle Werthe durchläuft, die der Bedingung

$$\frac{r}{8} < \frac{s}{P} < \frac{r+1}{8}$$

genügen; hieraus ergiebt sich weiter

$$J(r) - J(r+4) = 2\pi i \sum_{r}^{r+4} \left(\frac{s}{P}\right),$$

und ebenso, wenn r *positiv* ist,

$$J(r) - J(2r) = 2\pi i \sum_{r}^{2r} \left(\frac{s}{P}\right);$$

setzt man die hieraus folgenden Werthe von $J(r+4)$ und $J(2r)$ in die aus (6) abgeleitete Gleichung

$$J(r) + J(r+4) = \left(\frac{2}{P}\right) J(2r)$$

ein, so erhält man

$$\left\{2 - \left(\frac{2}{P}\right)\right\} J(r) = 2\pi i \left\{\sum_{r}^{r+4} \left(\frac{s}{P}\right) - \left(\frac{2}{P}\right) \sum_{r}^{2r} \left(\frac{s}{P}\right)\right\}.$$

Bedenkt man ferner, dass

$$\sum_{4}^{4+r} \left(\frac{s}{P}\right) = \left(\frac{-1}{P}\right) \sum_{4-r}^{4} \left(\frac{s}{P}\right)$$

ist, so ergiebt sich

$$\left\{2 - \left(\frac{2}{P}\right)\right\} J(0) = 2\pi i \sum_{0}^{4} \left(\frac{s}{P}\right)$$

$$\left\{2 - \left(\frac{2}{P}\right)\right\} J(2) = 2\pi i \left\{1 + \left(\frac{-1}{P}\right) - \left(\frac{2}{P}\right)\right\} \sum_{2}^{4} \left(\frac{s}{P}\right)$$

$$J(1) + \left(\frac{-1}{P}\right) J(3) = 2\pi i \left\{\sum_{1}^{4} \left(\frac{s}{P}\right) + \left(\frac{-1}{P}\right) \sum_{3}^{4} \left(\frac{s}{P}\right)\right\}.$$

Da endlich zufolge (6) und (4)

$$\psi(0) - \psi(4) = \left\{2 - \left(\frac{2}{P}\right)\right\} \psi(0),$$

$$\left\{1 - \left(\frac{-1}{P}\right)\right\} \psi(0) = J(0),$$

$$\psi(6) - \left(\frac{-1}{P}\right) \psi(2) = J(2),$$

$$\{\psi(7) - \psi(3)\} + \left(\frac{-1}{P}\right) \{\psi(5) - \psi(3)\} = J(1) + \left(\frac{-1}{P}\right) J(3)$$

ist, so wird, wenn die Determinante D *negativ*, also P im ersten und dritten Falle $\equiv 3$, im zweiten und vierten Falle $\equiv 1 \pmod{4}$ ist,

$$\text{I.}\quad N = \frac{\pi}{2\sqrt{P}} \sum_0^4 \left(\frac{s}{P}\right),$$

$$\text{II.}\quad N = \frac{\pi}{\sqrt{P}} \sum_0^2 \left(\frac{s}{P}\right),$$

$$\text{III.}\quad N = \frac{\pi}{\sqrt{2P}} \sum_1^3 \left(\frac{s}{P}\right),$$

$$\text{IV.}\quad N = \frac{\pi}{\sqrt{2P}} \left\{\sum_0^1 \left(\frac{s}{P}\right) - \sum_3^4 \left(\frac{s}{P}\right)\right\},$$

wenn man berücksichtigt, dass im zweiten und vierten Falle

$$\sum_0^4 \left(\frac{s}{P}\right) = 0$$

ist.

Für *positive* Determinanten erhält man ebenfalls Vereinfachungen durch die Betrachtung des *reellen* Ausdrucks (4)

$$\begin{aligned} R(r) &= \int_0^1 \Sigma \left(\frac{s}{P}\right) \left\{\frac{dx}{x - j^{-r}\theta^s} + \frac{dx}{x - j^r \theta^{-s}}\right\} \\ &= \Sigma \left(\frac{s}{P}\right) \log\{(j^r - \theta^s)(j^{-r} - \theta^{-s})\} \\ &= \log\left\{F(j^r) F(j^{-r})^{\left(\frac{-1}{P}\right)}\right\}, \end{aligned}$$

welcher zufolge (7) in den folgenden übergeht

$$R(r) = \log\{c F(j^r)^2\},$$

wo

$$c = \theta^{\Sigma b - \Sigma a} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{oder} \quad = 1$$

ist, je nachdem $P = 3$ oder von 3 verschieden ist (§. 140). Da nun zufolge (6) und (4)

$$\psi(0) - \psi(4) = \left\{2 - \left(\frac{2}{P}\right)\right\} \psi(0)$$

$$\left\{1 + \left(\frac{-1}{P}\right)\right\} \psi(0) = R(0)$$

$$\psi(6) + \left(\frac{-1}{P}\right) \psi(2) = R(2)$$

$$\psi(7) + \left(\frac{-1}{P}\right) \psi(1) = R(1)$$

$$\psi(5) + \left(\frac{-1}{P}\right) \psi(3) = R(3)$$