ist, so erhält man, weil im ersten und dritten Falle $P \equiv 1$, im zweiten und vierten Falle $P \equiv 3 \pmod{4}$ ist,

$$\text{I.} \quad N \,.\, 2\sqrt{P} = -\left\{1 - \left(\frac{2}{P}\right)\frac{1}{2}\right\} \log\{F(1)^2\}$$

$$\text{II.} \quad N \,.\, 2\sqrt{P} = -\log\{c F(i)^2\}$$

$$\text{III.} \quad N \,.\, 2\sqrt{2P} = \log\left\{\frac{F(j^3)^2}{F(j)^2}\right\}$$

$$\text{IV.} \quad N \,.\, 2\sqrt{2P} = -\log\{c^2 F(j)^2 F(j^3)^2\}.$$

§. 106.

Nachdem der Werth der unendlichen Reihe N für alle Fälle bestimmt ist, in welchen die Determinante D durch kein Quadrat (ausser 1) theilbar ist, können wir nun die Anzahl h der Classen der ursprünglichen Formen der ersten Art in geschlossener Form angeben*).

A. Für *negative* Determinanten D ist (nach §. 97)

$$h = \frac{2\sqrt{-D}}{\pi} \cdot N,$$

mit Ausnahme des Falles $D = -1$, wo der Ausdruck rechter Hand zu verdoppeln ist. Hieraus ergeben sich folgende vier Resultate

$$\text{I.} \quad D = -P \equiv 1 \pmod{4}; \quad h = \sum_0^4 \left(\frac{s}{P}\right)$$

$$\text{II.} \quad D = -P \equiv 3 \pmod{4}; \quad h = 2\sum_0^2 \left(\frac{s}{P}\right)$$

$$\text{III.} \quad D = -2P \equiv 2 \pmod{8}; \quad h = 2\sum_1^3 \left(\frac{s}{P}\right)$$

$$\text{IV.} \quad D = -2P \equiv 6 \pmod{8}; \quad h = 2\left\{\sum_0^1 \left(\frac{s}{P}\right) - \sum_3^4 \left(\frac{s}{P}\right)\right\},$$

wo die Grenzen der Summationen sich immer auf den Werth $8s : P$

*) Vergl. *Kronecker: Ueber die Anzahl der verschiedenen Classen quadratischer Formen von negativer Determinante*, Crelle's Journal LVII. Daselbst findet man für negative Determinanten wesentlich neue Formeln, welche aus der Theorie der elliptischen Functionen abgeleitet sind.

beziehen*). Aus II. und IV. sind resp. die Fälle $D = -1$ und $D = -2$ auszunehmen, in welchen $h = 1$ ist.

B. Für *positive* Determinanten D ist (nach §. 99)

$$h \log (T + U\sqrt{D}) = N \,.\, 2\sqrt{D},$$

wo T, U die kleinsten positiven ganzen Zahlen bedeuten, welche der Gleichung

$$T^2 - D U^2 = 1$$

genügen und nach der angegebenen Methode (§. 84) stets gefunden werden können. Der Werth $N \,.\, 2\sqrt{D}$ ist am Schlusse des vorigen Paragraphen bestimmt; statt der dortigen Formeln kann man auch die folgenden aus der Gleichung (2) des vorigen Paragraphen ableiten:

I. $D = P \equiv 1 \pmod{4}$

$$h \log (T + U\sqrt{P}) = -\left\{4 - 2\left(\frac{2}{P}\right)\right\} \sum_0^1 \left(\frac{n}{P}\right) \log \sin \frac{n\pi}{P}$$

II. $D = P \equiv 3 \pmod{4}$

$$h \log (T + U\sqrt{P}) = -\sum_0^4 \left(\frac{-1}{n}\right)\left(\frac{n}{P}\right) \log \sin \frac{n\pi}{4P}$$

III. $D = 2P \equiv 2 \pmod{8}$

$$h \log (T + U\sqrt{2P}) = -\sum_0^8 \left(\frac{2}{n}\right)\left(\frac{n}{P}\right) \log \sin \frac{n\pi}{8P}$$

IV. $D = 2P \equiv 6 \pmod{8}$

$$h \log (T + U\sqrt{2P}) = -\sum_0^8 \left(\frac{-2}{n}\right)\left(\frac{n}{P}\right) \log \sin \frac{n\pi}{8P}$$

wo n alle relativen Primzahlen zu $2P$ durchlaufen muss, für welche $n:P$ zwischen den angegebenen Summationsgrenzen liegt. Die drei letzten Fälle lassen sich in der gemeinschaftlichen Formel

$$h \log (T + U\sqrt{D}) = -\sum \left(\frac{D}{n}\right) \log \sin \frac{n\pi}{4D}$$

zusammenfassen, wo n alle zwischen 0 und $4D$ liegenden relativen Primzahlen zu $4D$ durchlaufen muss.

---

*) Umgekehrt kann man diese Formeln benutzen, um die Vertheilung der Zahlen a und b auf die acht Octanten mit Hülfe der Classenanzahlen für die Determinanten $-P$ und $-2P$ zu bestimmen (Gauss' Werke Bd. II. 1863. p. 288).