

Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie

Autor: Dirichlet, Peter

Verlag: Vieweg

Ort: Braunschweig

Jahr: 1871

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN30976923X

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X>

LOG Id: LOG_0115

LOG Titel: S. 106. Zusammenstellung der Formeln, durch welche die Classenanzahl bestimmt wird

LOG Typ: chapter

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

ist, so erhält man, weil im ersten und dritten Falle $P \equiv 1$, im zweiten und vierten Falle $P \equiv 3 \pmod{4}$ ist,

- I. $N \cdot 2 \sqrt{P} = - \left\{ 1 - \left(\frac{2}{P} \right) \frac{1}{2} \right\} \log \{F(1)^2\}$
- II. $N \cdot 2 \sqrt{P} = - \log \{c F(i)^2\}$
- III. $N \cdot 2 \sqrt{2P} = \log \left\{ \frac{F(j^3)^2}{F(j)^2} \right\}$
- IV. $N \cdot 2 \sqrt{2P} = - \log \{c^2 F(j)^2 F(j^3)^2\}$.

§. 106.

Nachdem der Werth der unendlichen Reihe N für alle Fälle bestimmt ist, in welchen die Determinante D durch kein Quadrat (ausser 1) theilbar ist, können wir nun die Anzahl h der Classen der ursprünglichen Formen der ersten Art in geschlossener Form angeben*).

A. Für *negative* Determinanten D ist (nach §. 97)

$$h = \frac{2 \sqrt{-D}}{\pi} \cdot N,$$

mit Ausnahme des Falles $D = -1$, wo der Ausdruck rechter Hand zu verdoppeln ist. Hieraus ergeben sich folgende vier Resultate

- I. $D = -P \equiv 1 \pmod{4}$; $h = \sum_0^4 \left(\frac{s}{P} \right)$
- II. $D = -P \equiv 3 \pmod{4}$; $h = 2 \sum_0^2 \left(\frac{s}{P} \right)$
- III. $D = -2P \equiv 2 \pmod{8}$; $h = 2 \sum_1^3 \left(\frac{s}{P} \right)$
- IV. $D = -2P \equiv 6 \pmod{8}$; $h = 2 \left\{ \sum_0^1 \left(\frac{s}{P} \right) - \sum_3^4 \left(\frac{s}{P} \right) \right\}$,

wo die Grenzen der Summationen sich immer auf den Werth $8s : P$

*) Vergl. *Kronecker: Ueber die Anzahl der verschiedenen Classen quadratischer Formen von negativer Determinante*, Crelle's Journal LVII. Dasselbst findet man für negative Determinanten wesentlich neue Formeln, welche aus der Theorie der elliptischen Functionen abgeleitet sind.

beziehen*). Aus II. und IV. sind resp. die Fälle $D = -1$ und $D = -2$ auszunehmen, in welchen $h = 1$ ist.

B. Für *positive* Determinanten D ist (nach §. 99)

$$h \log(T + U\sqrt{D}) = N \cdot 2\sqrt{D},$$

wo T, U die kleinsten positiven ganzen Zahlen bedeuten, welche der Gleichung

$$T^2 - DU^2 = 1$$

genügen und nach der angegebenen Methode (§. 84) stets gefunden werden können. Der Werth $N \cdot 2\sqrt{D}$ ist am Schlusse des vorigen Paragraphen bestimmt; statt der dortigen Formeln kann man auch die folgenden aus der Gleichung (2) des vorigen Paragraphen ableiten:

I. $D = P \equiv 1 \pmod{4}$

$$h \log(T + U\sqrt{P}) = - \left\{ 4 - 2 \left(\frac{2}{P} \right) \right\} \sum_0^1 \left(\frac{n}{P} \right) \log \sin \frac{n\pi}{P}$$

II. $D = P \equiv 3 \pmod{4}$

$$h \log(T + U\sqrt{P}) = - \sum_0^4 \left(\frac{-1}{n} \right) \left(\frac{n}{P} \right) \log \sin \frac{n\pi}{4P}$$

III. $D = 2P \equiv 2 \pmod{8}$

$$h \log(T + U\sqrt{2P}) = - \sum_0^8 \left(\frac{2}{n} \right) \left(\frac{n}{P} \right) \log \sin \frac{n\pi}{8P}$$

IV. $D = 2P \equiv 6 \pmod{8}$

$$h \log(T + U\sqrt{2P}) = - \sum_0^8 \left(\frac{-2}{n} \right) \left(\frac{n}{P} \right) \log \sin \frac{n\pi}{8P}$$

wo n alle relativen Primzahlen zu $2P$ durchlaufen muss, für welche $n:P$ zwischen den angegebenen Summationsgrenzen liegt. Die drei letzten Fälle lassen sich in der gemeinschaftlichen Formel

$$h \log(T + U\sqrt{D}) = - \sum \left(\frac{D}{n} \right) \log \sin \frac{n\pi}{4D}$$

zusammenfassen, wo n alle zwischen 0 und $4D$ liegenden relativen Primzahlen zu $4D$ durchlaufen muss.

*) Umgekehrt kann man diese Formeln benutzen, um die Vertheilung der Zahlen a und b auf die acht Octanten mit Hülfe der Classenanzahlen für die Determinanten $-P$ und $-2P$ zu bestimmen (Gauss' Werke Bd. II. 1863. p. 288).