

## Werk

**Titel:** Vorlesungen über Zahlentheorie

**Autor:** Dirichlet, Peter

**Verlag:** Vieweg

**Ort:** Braunschweig

**Jahr:** 1871

**Kollektion:** Mathematica

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN30976923X

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X>

**LOG Id:** LOG\_0116

**LOG Titel:** §. 107. Betrachtung der den positiven Determinanten entsprechenden Formeln; Umformung des Endresultates für den Fall  $D \equiv 1 \pmod{4}$

**LOG Typ:** chapter

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

## §. 107.

Betrachten wir die so gewonnenen Resultate, so zeigt sich ein wesentlicher Unterschied zwischen den positiven und negativen Determinanten. Während nämlich der Ausdruck für die Classenanzahl bei einer negativen Determinante unmittelbar die Form einer *ganzen* Zahl hat — dass dieselbe zugleich *positiv* ist, hat freilich bis jetzt noch Niemand auf elementarem Wege nachgewiesen — so ist dies keineswegs unmittelbar ersichtlich bei den Ausdrücken, welche die Classenanzahl für eine positive Determinante darstellen. Es ist nun von hohem Interesse, dass mit Hülfe eines Satzes aus der von Gauss\*) gegründeten Theorie der *Kreistheilung* (Supplement VII.) die obigen Ausdrücke für  $h \log (T + U \sqrt{D})$  wirklich stets in die Form  $\log (t + u \sqrt{D})$  übergeführt werden können, wo  $t, u$  ganze Zahlen bedeuten, welche der Gleichung  $t^2 - Du^2 = 1$  genügen. Dies wollen wir jetzt nachweisen\*\*).

Behalten wir die bisherigen Bezeichnungen bei, so können wir, wie im Supplement VII. gezeigt ist, stets

$$2A(x) = 2 \prod (x - \theta^a) = Y(x) - i^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2} \sqrt{P} \cdot Z(x)$$

$$2B(x) = 2 \prod (x - \theta^b) = Y(x) + i^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2} \sqrt{P} \cdot Z(x)$$

setzen, wo  $\sqrt{P}$  positiv ist, und  $Y(x), Z(x)$  ganze Functionen von  $x$  bedeuten, deren Coefficienten ganze Zahlen sind. Zugleich ist

$$A(x)B(x) = \prod (x - \theta^s) = \frac{\prod (x^{\mu_1} - 1)}{\prod (x^{\mu_2} - 1)},$$

wo  $\mu_1$  jedes positive,  $\mu_2$  jedes negative Glied des entwickelten Productes

$$\varphi(P) = (p-1)(p'-1)(p''-1)\dots = \sum \mu_1 - \sum \mu_2$$

bedeutet, und

$$F(x) = \prod (x - \theta^s)^{\left(\frac{s}{P}\right)} = \frac{A(x)}{B(x)}.$$

\*) D. A. Sectio VII.

\*\*) *Lejeune Dirichlet: Sur la manière de résoudre l'équation  $t^2 - pu^2 = 1$  au moyen des fonctions circulaires* (Crelle's Journal XVII). Vergl. *Jacobi: Ueber die Kreistheilung und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie* (Berliner Monatsberichte 1837).

Wir wenden uns nun, indem wir die am Schlusse des §. 105 gefundenen Ausdrücke für das Product  $h \log(T + U\sqrt{D}) = N \cdot 2\sqrt{D}$  zu Grunde legen, zunächst dem Falle I. zu, in welchem  $D \equiv P \equiv 1 \pmod{4}$ , und also

$$h \log(T + U\sqrt{P}) = - \left\{ 1 - \left( \frac{2}{P} \right) \frac{1}{2} \right\} \log \{F(1)^2\}$$

ist. Da nun

$$A(1)B(1) = \frac{\prod \mu_1}{\prod \mu_2} = P^\kappa$$

ist, wo  $\kappa = 1$  oder  $= 0$  ist, je nachdem  $P$  eine Primzahl oder zusammengesetzt ist (§. 138), so ergibt sich

$$F(1) = \frac{A(1)}{B(1)} = \frac{P^\kappa}{B(1)^2};$$

da ferner

$$2A(1) = y - z\sqrt{P}, \quad 2B(1) = y + z\sqrt{P}$$

ist, wo die ganzen Zahlen  $Y(1), Z(1)$  zur Abkürzung mit  $y, z$  bezeichnet sind, so wird

$$y^2 - Pz^2 = 4P^\kappa,$$

und folglich muss, wenn  $P$  eine Primzahl ist,  $y$  durch  $P$  theilbar sein; mithin kann man in allen Fällen

$$y + z\sqrt{P} = (\alpha + \beta\sqrt{P})(\sqrt{P})^\kappa$$

setzen, wo  $\alpha, \beta$  ganze Zahlen bedeuten, welche der Gleichung

$$\alpha^2 - P\beta^2 = 4(-1)^\kappa$$

genügen, und man erhält

$$(T + U\sqrt{P})^h = \left( \frac{\alpha + \beta\sqrt{P}}{2} \right)^{4-2\left(\frac{2}{P}\right)}.$$

Sind nun die Zahlen  $y, z$  gerade, was jedenfalls eintreten muss, wenn  $P \equiv 1 \pmod{8}$  ist, so kann man  $\alpha = 2\alpha', \beta = 2\beta'$  setzen, wo die ganzen Zahlen  $\alpha' \beta'$  der Gleichung

$$\alpha'^2 - P\beta'^2 = (-1)^\kappa$$

genügen; setzt man ferner

$$(\alpha' + \beta'\sqrt{P})^{1+\kappa} = t + u\sqrt{P},$$

so genügen die ganzen Zahlen  $t, u$  der Gleichung  $t^2 - Pu^2 = 1$  und man erhält

$$(T + U\sqrt{P})^h = (t + u\sqrt{P})^{\left(2 - \left(\frac{2}{P}\right)\right)(2-\kappa)}.$$