Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie
Autor: Dirichlet, Peter
Verlag: Vieweg
Ort: Braunschweig
Jahr: 1871
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN30976923X
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X

LOG Id: LOG_0116
LOG Titel: §. 107. Betrachtung der den positiven Determinanten entsprechenden Formeln; Umformung des Endresultates für den Fall D=l (mod. 4)
LOG Typ: chapter

Terms and Conditions

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

§. 107.

Betrachten wir die so gewonnenen Resultate, so zeigt sich ein wesentlicher Unterschied zwischen den positiven und negativen Determinanten. Während nämlich der Ausdruck für die Classenanzahl bei einer negativen Determinante unmittelbar die Form einer *ganzen* Zahl hat — dass dieselbe zugleich *positiv* ist, hat freilich bis jetzt noch Niemand auf elementarem Wege nachgewiesen — so ist dies keineswegs unmittelbar ersichtlich bei den Ausdrücken, welche die Classenanzahl für eine positive Determinante darstellen. Es ist nun von hohem Interesse, dass mit Hülfe eines Satzes aus der von *Gauss* *) gegründeten Theorie der *Kreistheilung* (Supplement VII.) die obigen Ausdrücke für $h \log(T + U\sqrt{D})$ wirklich stets in die Form $\log(t + u\sqrt{D})$ übergeführt werden können, wo t, u ganze Zahlen bedeuten, welche der Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$ genügen. Dies wollen wir jetzt nachweisen **).

Behalten wir die bisherigen Bezeichnungen bei, so können wir, wie im Supplement VII. gezeigt ist, stets

$$2A(x) = 2\,\Pi\,(x - \theta^a) = Y(x) - i^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2}\sqrt{P}\,.\,Z(x)$$

$$2B(x) = 2\,\Pi\,(x - \theta^b) = Y(x) + i^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2}\sqrt{P}\,.\,Z(x)$$

setzen, wo $\sqrt{P}$ positiv ist, und $Y(x)$, $Z(x)$ ganze Functionen von x bedeuten, deren Coefficienten ganze Zahlen sind. Zugleich ist

$$A(x)\,B(x) = \Pi\,(x - \theta^s) = \frac{\Pi\,(x^{\mu_1} - 1)}{\Pi\,(x^{\mu_2} - 1)},$$

wo μ_1 jedes positive, μ_2 jedes negative Glied des entwickelten Productes

$$\varphi(P) = (p-1)\,(p'-1)\,(p''-1)\ldots = \Sigma\,\mu_1 - \Sigma\,\mu_2$$

bedeutet, und

$$F(x) = \Pi\,(x - \theta^s)^{\left(\frac{s}{P}\right)} = \frac{A(x)}{B(x)}.$$

---

*) *D. A.* Sectio VII.

**) *Lejeune Dirichlet: Sur la manière de résoudre l'équation $t^2 - pu^2 = 1$ au moyen des fonctions circulaires* (Crelle's Journal XVII). Vergl. *Jacobi: Ueber die Kreistheilung und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie* (Berliner Monatsberichte 1837).

Wir wenden uns nun, indem wir die am Schlusse des §. 105 gefundenen Ausdrücke für das Product $h\log(T+U\sqrt{D}) = N.2\sqrt{D}$ zu Grunde legen, zunächst dem Falle I. zu, in welchem $D = P \equiv 1 \pmod{4}$, und also

$$h\log(T+U\sqrt{P}) = -\left\{1-\left(\frac{2}{P}\right)\frac{1}{2}\right\}\log\{F(1)^2\}$$

ist. Da nun

$$A(1)B(1) = \frac{\Pi\mu_1}{\Pi\mu_2} = P^\varkappa$$

ist, wo $\varkappa = 1$ oder $= 0$ ist, je nachdem P eine Primzahl oder zusammengesetzt ist (§. 138), so ergiebt sich

$$F(1) = \frac{A(1)}{B(1)} = \frac{P^\varkappa}{B(1)^2};$$

da ferner

$$2A(1) = y - z\sqrt{P},\quad 2B(1) = y + z\sqrt{P}$$

ist, wo die ganzen Zahlen $Y(1)$, $Z(1)$ zur Abkürzung mit y, z bezeichnet sind, so wird

$$y^2 - Pz^2 = 4P^\varkappa,$$

und folglich muss, wenn P eine Primzahl ist, y durch P theilbar sein; mithin kann man in allen Fällen

$$y + z\sqrt{P} = (\alpha + \beta\sqrt{P})(\sqrt{P})^\varkappa$$

setzen, wo α, β ganze Zahlen bedeuten, welche der Gleichung

$$\alpha^2 - P\beta^2 = 4(-1)^\varkappa$$

genügen, und man erhält

$$(T+U\sqrt{P})^h = \left(\frac{\alpha+\beta\sqrt{P}}{2}\right)^{4-2\left(\frac{2}{P}\right)}.$$

Sind nun die Zahlen y, z gerade, was jedenfalls eintreten muss, wenn $P \equiv 1 \pmod{8}$ ist, so kann man $\alpha = 2\alpha'$, $\beta = 2\beta'$ setzen, wo die ganzen Zahlen α' β' der Gleichung

$$\alpha'^2 - P\beta'^2 = (-1)^\varkappa$$

genügen; setzt man ferner

$$(\alpha' + \beta'\sqrt{P})^{1+\varkappa} = t + u\sqrt{P},$$

so genügen die ganzen Zahlen t, u der Gleichung $t^2 - Pu^2 = 1$ und man erhält

$$(T+U\sqrt{P})^h = (t+u\sqrt{P})^{\left(2-\left(\frac{2}{P}\right)\right)(2-\varkappa)}.$$