

Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie

Autor: Dirichlet, Peter

Verlag: Vieweg

Ort: Braunschweig

Jahr: 1871

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN30976923X

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X>

LOG Id: LOG_0117

LOG Titel: S. 108. Umformung für den Fall $D=3 \pmod{4}$

LOG Typ: chapter

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Sind dagegen die Zahlen y, z und folglich auch α, β ungerade, was nur dann eintreten kann, wenn $P \equiv 5 \pmod{8}$ ist (z. B. wenn $P = 13$, während z. B. für $P = 37$ der frühere Fall Statt findet), so kann man

$$\left(\frac{\alpha + \beta \sqrt{P}}{2}\right)^3 = \alpha' + \beta' \sqrt{P}$$

setzen, wo α', β' ganze Zahlen sind, die der Gleichung

$$\alpha'^2 - P\beta'^2 = (-1)^x$$

genügen; setzt man nun wieder

$$(\alpha' + \beta' \sqrt{P})^{1+x} = t + u \sqrt{P},$$

so wird $t^2 - Pu^2 = 1$, und

$$(T + U\sqrt{P})^h = (t + u\sqrt{P})^{2-x}.$$

Es leuchtet ein, dass, wenn $P \equiv 5 \pmod{8}$ ist, der erste oder zweite Fall eintreten wird, je nachdem die Classenzahl h durch 3 theilbar ist oder nicht (vergl. §. 99). Ebenso leicht erkennt man, dass in allen Fällen $h \equiv x \pmod{2}$, d. h. dass die Classenzahl h ungerade oder gerade sein wird, je nachdem P eine Primzahl oder zusammengesetzt ist (vergl. §. 83. Anm.). Endlich mag noch bemerkt werden, dass die Zahlen y, z beide positiv sind; da nämlich $P \equiv 1 \pmod{4}$, so zerfallen die Zahlen a in Paare von der Form a und $-a$, ebenso die Zahlen b in Paare von der Form b und $-b$, und folglich sind $A(1), B(1)$ und $A(1) + B(1) = y$ positiv; da ferner

$$\left\{2 - \left(\frac{2}{P}\right)\right\} \{\log B(1) - \log A(1)\} = h \log(T + U\sqrt{P})$$

positiv ist, weil h positiv, $T + U\sqrt{P} > 1$ ist, so muss $B(1) > A(1)$, und folglich z positiv sein: ein Resultat, das bisher auf anderm Wege noch nicht bewiesen ist.

§. 108.

Für den zweiten Fall $D = P \equiv 3 \pmod{4}$ haben wir oben das Resultat

$$h \log(T + U\sqrt{P}) = -\log \{cF(i)^2\}$$

erhalten; da nun, wenn m irgend eine ungerade Zahl bedeutet,

$$\frac{i^m - 1}{i - 1} = i^{1/4(m-1)^2}$$

ist, und da ferner

$$\sum \mu_1 - \sum \mu_2 = (p - 1) (p' - 1) (p'' - 1) \dots$$

$$\sum \mu_1^2 - \sum \mu_2^2 = (p^2 - 1) (p'^2 - 1) (p''^2 - 1) \dots$$

ist, so findet man leicht

$$A(i) B(i) = \frac{\prod (i^{\mu_1} - 1)}{\prod (i^{\mu_2} - 1)} = i^\kappa,$$

wo κ wieder $= 1$ oder $= 0$ ist, je nachdem P eine Primzahl oder zusammengesetzt ist. Folglich wird

$$F(i) = \frac{A(i)}{B(i)} = \frac{i^\kappa}{B(i)^2},$$

und also, da $c^3 = 1$ ist,

$$(T + UV P)^h = c^2 (-1)^\kappa B(i)^4.$$

Mit Ausnahme des Falles $P = 3$ ist nun (nach §. 140) $c = 1$, und

$$(-x)^\tau B\left(\frac{1}{x}\right) = A(x), \quad (-x)^\tau A\left(\frac{1}{x}\right) = B(x),$$

wo $\varphi(P) = 2\tau$ gesetzt ist, folglich

$$i^\tau B(i) = A(-i), \quad i^\tau A(i) = B(-i),$$

also auch

$$i^\tau \cdot Y(i) = Y(-i), \quad i^\tau \cdot iZ(i) = -iZ(-i);$$

berücksichtigt man nun, dass

$$i^\tau = -\left(\frac{2}{P}\right)i \quad \text{oder} \quad = 1$$

ist, je nachdem P eine Primzahl oder zusammengesetzt ist, so folgt hieraus, dass man

$$Y(i) = \left(1 + \left(\frac{2}{P}\right)i\right)^\kappa y, \quad iZ(i) = \left(1 + \left(\frac{2}{P}\right)i\right)^\kappa z,$$

also

$$2A(i) = \left(1 + \left(\frac{2}{P}\right)i\right)^\kappa (y - z \vee P), \quad 2B(i) = \left(1 + \left(\frac{2}{P}\right)i\right)^\kappa (y + z \vee P)$$

setzen kann, wo y, z ganze Zahlen bedeuten, welche der durch Multiplication entstehenden Gleichung

$$y^2 - Pz^2 = \left(\frac{2}{P^\kappa}\right) 2^{2-\kappa}$$