Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie
Autor: Dirichlet, Peter
Verlag: Vieweg
Ort: Braunschweig
Jahr: 1871
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN30976923X
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X

LOG Id: LOG_0117
LOG Titel: §. 108. Umformung für den Fall D=3 (mod. 4)
LOG Typ: chapter

Sind dagegen die Zahlen y, z und folglich auch α, β ungerade, was nur dann eintreten kann, wenn $P \equiv 5 \pmod{8}$ ist (z.B. wenn $P = 13$, während z.B. für $P = 37$ der frühere Fall Statt findet), so kann man

$$\left(\frac{\alpha + \beta\sqrt{P}}{2}\right)^3 = \alpha' + \beta'\sqrt{P}$$

setzen, wo α', β' ganze Zahlen sind, die der Gleichung

$$\alpha'^2 - P\beta'^2 = (-1)^\varkappa$$

genügen; setzt man nun wieder

$$(\alpha' + \beta'\sqrt{P})^{1+\varkappa} = t + u\sqrt{P},$$

so wird $t^2 - Pu^2 = 1$, und

$$(T + U\sqrt{P})^h = (t + u\sqrt{P})^{2-\varkappa}.$$

Es leuchtet ein, dass, wenn $P \equiv 5 \pmod{8}$ ist, der erste oder zweite Fall eintreten wird, je nachdem die Classenanzahl h durch 3 theilbar ist oder nicht (vergl. §. 99). Ebenso leicht erkennt man, dass in allen Fällen $h \equiv \varkappa \pmod{2}$, d. h. dass die Classenanzahl h ungerade oder gerade sein wird, je nachdem P eine Primzahl oder zusammengesetzt ist (vergl. §. 83. Anm.). Endlich mag noch bemerkt werden, dass die Zahlen y, z beide positiv sind; da nämlich $P \equiv 1 \pmod{4}$, so zerfallen die Zahlen a in Paare von der Form a und $-a$, ebenso die Zahlen b in Paare von der Form b und $-b$, und folglich sind $A(1)$, $B(1)$ und $A(1) + B(1) = y$ positiv; da ferner

$$\left\{2 - \left(\frac{2}{P}\right)\right\} \{\log B(1) - \log A(1)\} = h \log(T + U\sqrt{P})$$

positiv ist, weil h positiv, $T + U\sqrt{P} > 1$ ist, so muss $B(1) > A(1)$, und folglich z positiv sein: ein Resultat, das bisher auf anderm Wege noch nicht bewiesen ist.

§. 108.

Für den zweiten Fall $D = P \equiv 3 \pmod{4}$ haben wir oben das Resultat

$$h \log(T + U\sqrt{P}) = -\log\{cF(i)^2\}$$

erhalten; da nun, wenn m irgend eine ungerade Zahl bedeutet,

$$\frac{i^m - 1}{i - 1} = i^{1/4(m-1)^2}$$

ist, und da ferner

$$\Sigma \mu_1 - \Sigma \mu_2 = (p-1)(p'-1)(p''-1)\ldots$$
$$\Sigma \mu_1^2 - \Sigma \mu_2^2 = (p^2-1)(p'^2-1)(p''^2-1)\ldots$$

ist, so findet man leicht

$$A(i)\,B(i) = \frac{\Pi(i^{\mu_1}-1)}{\Pi(i^{\mu_2}-1)} = i^{\varkappa},$$

wo $\varkappa$ wieder $= 1$ oder $= 0$ ist, je nachdem P eine Primzahl oder zusammengesetzt ist. Folglich wird

$$F(i) = \frac{A(i)}{B(i)} = \frac{i^{\varkappa}}{B(i)^2},$$

und also, da $c^3 = 1$ ist,

$$(T + U\sqrt{P})^h = c^2\,(-1)^{\varkappa} B(i)^4.$$

Mit Ausnahme des Falles $P = 3$ ist nun (nach §. 140) $c = 1$, und

$$(-x)^{\tau} B\left(\frac{1}{x}\right) = A(x),\quad (-x)^{\tau} A\left(\frac{1}{x}\right) = B(x),$$

wo $\varphi(P) = 2\tau$ gesetzt ist, folglich

$$i^{\tau} B(i) = A(-i),\quad i^{\tau} A(i) = B(-i),$$

also auch

$$i^{\tau}\,.\,Y(i) = Y(-i),\quad i^{\tau}\,.\,iZ(i) = -\,iZ(-i);$$

berücksichtigt man nun, dass

$$i^{\tau} = -\left(\frac{2}{P}\right)i \quad \text{oder} \quad = 1$$

ist, je nachdem P eine Primzahl oder zusammengesetzt ist, so folgt hieraus, dass man

$$Y(i) = \left(1 + \left(\frac{2}{P}\right)i\right)^{\varkappa} y,\quad iZ(i) = \left(1 + \left(\frac{2}{P}\right)i\right)^{\varkappa} z,$$

also

$$2A(i) = \left(1 + \left(\frac{2}{P}\right)i\right)^{\varkappa}(y - z\sqrt{P}),\ 2B(i) = \left(1 + \left(\frac{2}{P}\right)i\right)^{\varkappa}(y + z\sqrt{P})$$

setzen kann, wo y, z ganze Zahlen bedeuten, welche der durch Multiplication entstehenden Gleichung

$$y^2 - Pz^2 = \left(\frac{2}{P^{\varkappa}}\right) 2^{2-\varkappa}$$