genügen; hieraus folgt weiter, dass man

$$(y + z\sqrt{P})^{1+\varkappa} = 2(t + u\sqrt{P})$$

setzen kann, wo t, u ganze Zahlen bedeuten, welche der Gleichung $t^2 - Pu^2 = 1$ genügen. Zugleich wird

$$B(i)^{1+\varkappa} = \left(\frac{2}{P\varkappa}\right) i^{\varkappa}(t + u\sqrt{P}),$$

und folglich

$$(T + U\sqrt{P})^h = (t + u\sqrt{P})^{4-2\varkappa}.$$

Wir erwähnen, dass $h \equiv 2\varkappa \pmod{4}$ ist, und dass die Zahlen y, z stets dasselbe Vorzeichen haben.

In dem bisher ausgeschlossenen Fall $P = 3$ ist $T = 2$, $U = 1$, $c = \theta$, $B(i) = i - \theta^2$, woraus leicht folgt, dass

$$\frac{1}{cF(i)^2} = c^2(-1)^{\varkappa} B(i)^4 = (2 + \sqrt{3})^2,$$

also $h = 2$ ist.

§. 109.

Für den dritten Fall $D = 2P \equiv 2 \pmod{8}$ haben wir oben

$$h \log(T + U\sqrt{2P}) = \log\left\{\frac{F(j^3)^2}{F(j)^2}\right\}$$

gefunden. Berücksichtigt man nun, dass, wenn m irgend eine ungerade Zahl bedeutet,

$$\frac{(j^m - 1)(j^{3m} - 1)}{(j - 1)(j^3 - 1)} = \left(\frac{-2}{m}\right)$$

ist, so findet man

$$A(j)B(j)A(j^3)B(j^3) = \frac{\Pi(j^{\mu_1} - 1)(j^{3\mu_1} - 1)}{\Pi(j^{\mu_2} - 1)(j^{3\mu_2} - 1)} = \left(\frac{-2}{P\varkappa}\right),$$

und folglich

$$(T + U\sqrt{2P})^h = A(j^3)^4 B(j)^4,$$

wo $\varkappa$ wieder $= 1$ oder $= 0$, je nachdem P eine Primzahl oder zusammengesetzt ist. Da nun $P \equiv 1 \pmod{4}$, und also $Y(j) = j^{\tau} Y(j^{-1})$, $Z(j) = j^{\tau} Z(j^{-1})$ ist (§. 140), so kann man