

## Werk

**Titel:** Vorlesungen über Zahlentheorie

**Autor:** Dirichlet, Peter

**Verlag:** Vieweg

**Ort:** Braunschweig

**Jahr:** 1871

**Kollektion:** Mathematica

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN30976923X

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X>

**LOG Id:** LOG\_0119

**LOG Titel:** S. 110. Umformung für den Fall  $D=6 \pmod{8}$

**LOG Typ:** chapter

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

$Y(j) = j^{1/2\tau} \{y' + y''(j - j^3)\}$ ,  $Z(j) = j^{1/2\tau} \{z' + z''(j - j^3)\}$   
 setzen, wo  $y', y'', z', z''$  ganze Zahlen bedeuten; da ferner  $j - j^3 = \sqrt{2}$  ist, so erhält man, wenn man

$$\alpha = (-1)^{1/2\tau} \{y'^2 - 2y''^2 - P(z'^2 - 2z''^2)\},$$

$$\beta = (-1)^{1/2\tau} \cdot 2(y'z'' - y''z')$$

setzt,

$$4A(j^3)B(j) = \alpha + \beta\sqrt{2P}, \quad 4A(j)B(j^3) = \alpha - \beta\sqrt{2P},$$

wo die ganzen Zahlen  $\alpha, \beta$  der Gleichung

$$\alpha^2 - 2P\beta^2 = 16 \left( \frac{-2}{P^*} \right)$$

genügen und folglich beide durch 4 theilbar sind. Man kann daher

$$A(j^3)B(j) = y + z\sqrt{2P}$$

setzen, wo die ganzen Zahlen  $y, z$  der Gleichung

$$y^2 - 2Pz^2 = \left( \frac{-2}{P^*} \right)$$

genügen, und es ist

$$(T + U\sqrt{2P})^h = (y + z\sqrt{2P})^4.$$

Hieraus folgt, dass  $h \equiv 2 \pmod{4}$ , falls  $P$  eine Primzahl von der Form  $8n + 5$ , sonst aber  $h \equiv 0 \pmod{4}$  ist.

In dem bisher ausgeschlossenen Falle  $D = 2$  war  $N\sqrt{D} = \log(1 + \sqrt{2})$ ; da ferner  $T = 3, U = 2$  ist, so folgt

$$h \log(3 + 2\sqrt{2}) = 2 \log(1 + \sqrt{2}),$$

also  $h = 1$ .

§. 110.

Für den vierten Fall  $D = 2P \equiv 6 \pmod{8}$  haben wir oben (§§. 105, 106) das Resultat

$$h \log(T + U\sqrt{2P}) = - \log \{c^2 F(j)^2 F(j^3)\}^2$$

gefunden, welches vermöge der Gleichung

$$A(j)B(j)A(j^3)B(j^3) = \left( \frac{-2}{P^*} \right)$$

in

$$(T + U\sqrt{2P})^h = c B(j)^4 B(j^3)^4$$

übergeht, weil  $c^3 = 1$  ist. Lassen wir den Fall  $P = 3$  unberücksichtigt, so ist (nach §. 140)  $c = 1$ , und  $Y(j) = (-j)^\tau Y(j^{-1})$ ,  $-Z(j) = (-j)^\tau Z(j^{-1})$ ; da ferner  $\tau$  ungerade oder durch 4 theilbar ist, je nachdem  $\kappa = 1$  oder  $= 0$ , d. h. je nachdem  $P$  eine Primzahl oder zusammengesetzt ist, so kann man

$$Y(j) = (j^{1/2\tau(1+\kappa)} - \kappa) (y' + y''(j - j^3))$$

$$j^2 Z(j) = (j^{1/2\tau(1+\kappa)} - \kappa) (z' + z''(j - j^3))$$

setzen, wo  $y'$ ,  $y''$ ,  $z'$ ,  $z''$  ganze Zahlen bedeuten; berücksichtigt man, dass  $j - j^3 = \sqrt{2}$  ist, und setzt

$$\alpha = y'^2 - Pz'^2 - 2y''^2 + 2Pz''^2$$

$$\beta = 2(y'z'' - z'y''),$$

so erhält man

$$4A(j)A(j^3) = (-j^\tau - j^{3\tau})^\kappa (\alpha - \beta\sqrt{2P})$$

$$4B(j)B(j^3) = (-j^\tau - j^{3\tau})^\kappa (\alpha + \beta\sqrt{2P}),$$

wo die ganzen Zahlen  $\alpha$ ,  $\beta$  der durch Multiplication entstehenden Gleichung

$$\alpha^2 - 2P\beta^2 = \left(\frac{-2}{P^\kappa}\right) (-2)^{4-\kappa}$$

genügen; man kann daher

$$(\alpha + \beta\sqrt{2P})^{1+\kappa} = 2^{2+\kappa}(t + u\sqrt{2P})$$

setzen, wo die ganzen Zahlen  $t$ ,  $u$  der Gleichung  $t^2 - 2Pu^2 = 1$  genügen; dann wird

$$B(j)^{1+\kappa} B(j^3)^{1+\kappa} = (-1)^\kappa (t + u\sqrt{2P})$$

und folglich

$$(T + U\sqrt{2P})^h = (t + u\sqrt{2P})^{4-2\kappa},$$

woraus leicht folgt, dass  $h \equiv 2\kappa \pmod{4}$  ist.

In dem ausgeschlossenen Fall  $P = 3$  ist  $c = \theta = \theta^4$ ,  $T = 5$ ,  $U = 2$ , und man erhält

$$\theta B(j) B(j^3) = \theta(j - \theta^2)(j^3 - \theta^2) = -i(\sqrt{2} + \sqrt{3})$$

$$\theta^2 B(j)^2 B(j^3)^2 = -(5 + 2\sqrt{6}) = -(T + U\sqrt{2P})$$

und hieraus  $h = 2$ .

S U P P L E M E N T E.

---

