Werk

Titel: Vorlesungen über Zahlentheorie
Autor: Dirichlet, Peter
Verlag: Vieweg
Ort: Braunschweig
Jahr: 1871
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN30976923X
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN30976923X
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=30976923X

LOG Id: LOG_0119
LOG Titel: §. 110. Umformung für den Fall D=6 (mod. 8)
LOG Typ: chapter

Contact

$$Y(j) = j^{1/2\tau}\{y' + y''(j - j^3)\}, \quad Z(j) = j^{1/2\tau}\{z' + z''(j - j^3)\}$$

setzen, wo y', y'', z', z'' ganze Zahlen bedeuten; da ferner $j - j^3 = \sqrt{2}$ ist, so erhält man, wenn man

$$\alpha = (-1)^{1/2\tau}\{y'^2 - 2y''^2 - P(z'^2 - 2z''^2)\},$$
$$\beta = (-1)^{1/2\tau}.2(y'z'' - y''z')$$

setzt,

$$4A(j^3)B(j) = \alpha + \beta\sqrt{2P}, \quad 4A(j)B(j^3) = \alpha - \beta\sqrt{2P},$$

wo die ganzen Zahlen α, β der Gleichung

$$\alpha^2 - 2P\beta^2 = 16\left(\frac{-2}{P^\varkappa}\right)$$

genügen und folglich beide durch 4 theilbar sind. Man kann daher

$$A(j^3)B(j) = y + z\sqrt{2P}$$

setzen, wo die ganzen Zahlen y, z der Gleichung

$$y^2 - 2Pz^2 = \left(\frac{-2}{P^\varkappa}\right)$$

genügen, und es ist

$$(T + U\sqrt{2P})^h = (y + z\sqrt{2P})^4.$$

Hieraus folgt, dass $h \equiv 2 \pmod{4}$, falls P eine Primzahl von der Form $8n + 5$, sonst aber $h \equiv 0 \pmod{4}$ ist.

In dem bisher ausgeschlossenen Falle $D = 2$ war $N\sqrt{D} = \log(1 + \sqrt{2})$; da ferner $T = 3$, $U = 2$ ist, so folgt

$$h\log(3 + 2\sqrt{2}) = 2\log(1 + \sqrt{2}),$$

also $h = 1$.

§. 110.

Für den vierten Fall $D = 2P \equiv 6 \pmod{8}$ haben wir oben (§§. 105, 106) das Resultat

$$h\log(T + U\sqrt{2P}) = -\log\{c^2F(j)^2F(j^3)\}^2$$

gefunden, welches vermöge der Gleichung

$$A(j)B(j)A(j^3)B(j^3) = \left(\frac{-2}{P^\varkappa}\right)$$

in

$$(T + U\sqrt{2P})^h = c\,B(j)^4 B(j^3)^4$$

übergeht, weil $c^3 = 1$ ist. Lassen wir den Fall $P = 3$ unberücksichtigt, so ist (nach §. 140) $c = 1$, und $Y(j) = (-j)^\tau Y(j^{-1})$, $-Z(j) = (-j)^\tau Z(j^{-1})$; da ferner τ ungerade oder durch 4 theilbar ist, je nachdem $\varkappa = 1$ oder $= 0$, d. h. je nachdem P eine Primzahl oder zusammengesetzt ist, so kann man

$$Y(j) = (j^{\frac{1}{2}\tau(1+\varkappa)} - \varkappa)\,(y' + y''(j - j^3))$$
$$j^2 Z(j) = (j^{\frac{1}{2}\tau(1+\varkappa)} - \varkappa)\,(z' + z''(j - j^3))$$

setzen, wo y', y'', z', z'' ganze Zahlen bedeuten; berücksichtigt man, dass $j - j^3 = \sqrt{2}$ ist, und setzt

$$\alpha = y'^2 - Pz'^2 - 2y''^2 + 2Pz''^2$$
$$\beta = 2(y'z'' - z'y''),$$

so erhält man

$$4A(j)A(j^3) = (-j^\tau - j^{3\tau})^\varkappa (\alpha - \beta\sqrt{2P})$$
$$4B(j)B(j^3) = (-j^\tau - j^{3\tau})^\varkappa (\alpha + \beta\sqrt{2P}),$$

wo die ganzen Zahlen α, β der durch Multiplication entstehenden Gleichung

$$\alpha^2 - 2P\beta^2 = \left(\frac{-2}{P^\varkappa}\right)(-2)^{4-\varkappa}$$

genügen; man kann daher

$$(\alpha + \beta\sqrt{2P})^{1+\varkappa} = 2^{2+\varkappa}(t + u\sqrt{2P})$$

setzen, wo die ganzen Zahlen t, u der Gleichung $t^2 - 2Pu^2 = 1$ genügen; dann wird

$$B(j)^{1+\varkappa} B(j^3)^{1+\varkappa} = (-1)^\varkappa (t + u\sqrt{2P})$$

und folglich

$$(T + U\sqrt{2P})^h = (t + u\sqrt{2P})^{4-2\varkappa},$$

woraus leicht folgt, dass $h \equiv 2\varkappa \pmod{4}$ ist.

In dem ausgeschlossenen Fall $P = 3$ ist $c = \theta = \theta^4$, $T = 5$, $U = 2$, und man erhält

$$\theta B(j)B(j^3) = \theta(j - \theta^2)(j^3 - \theta^2) = -i(\sqrt{2} + \sqrt{3})$$
$$\theta^2 B(j)^2 B(j^3)^2 = -(5 + 2\sqrt{6}) = -(T + U\sqrt{2P})$$

und hieraus $h = 2$.

SUPPLEMENTE.